6. ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Όταν θα έχουμε τελειώσει το κεφάλαιο αυτό θα μπορούμε να:

- ορίσουμε το **Μετασχηματισμό Laplace** (ML) και το **Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace** (MML) και να περιγράψουμε τις βασικές διαφορές τους.
- περιγράψουμε τι είναι **συνάρτηση μεταφοράς συστήματος** και εξηγήσουμε έννοιες όπως ***περιοχή σύγκλισης***, ***πόλος*** και ***μηδενικό***.
- διατυπώσουμε **τη σχέση** που υπάρχει μεταξύ μετασχηματισμού Fourier και μετασχηματισμού Laplace.
- υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace **στοιχειωδών σημάτων**.
- αναφέρουμε **τις ιδιότητες** του μετασχηματισμού Laplace.

- υπολογίζουμε εύκολα **τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** μιας συνάρτησης, χωρίς να καταφεύγουμε στην εξίσωση αντιστροφής

- επιλύουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ***με αρχικές συνθήκες*** με τη βοήθεια του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace.

- υπολογίζουμε **τη συνάρτηση μεταφοράς ενός** ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης, η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

- υπολογίζουμε την έξοδο ενός συστήματος, το οποίο δε βρίσκεται απαραίτητα σε ***κατάσταση ηρεμίας***, όταν γνωρίζουμε την είσοδό του και τη διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

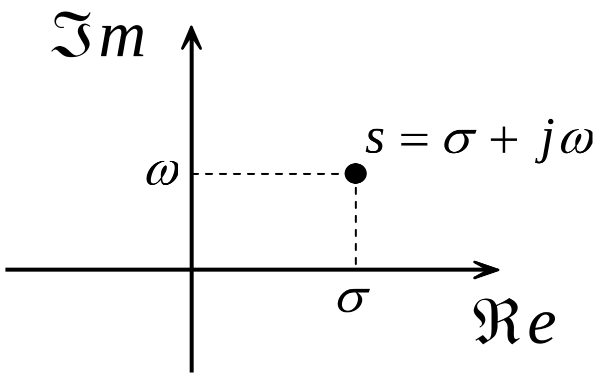
- προσδιορίζουμε **τη συμπεριφορά ενός συστήματος** από τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο ***Μετασχηματισμός Laplace*** αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ τη συνάρτηση

$$L[x(t)] = X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ του σήματος $x(t)$ είναι μιγαδική συνάρτηση, της μιγαδικής μεταβλητής $s = \sigma + j\omega$.



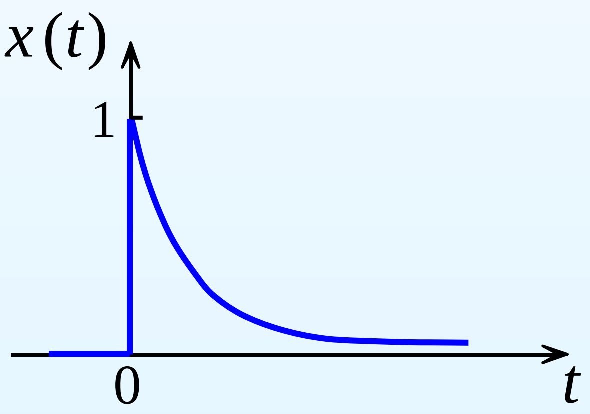
Το μιγαδικό επίπεδο

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του αιτιατού εκθετικού σήματος:

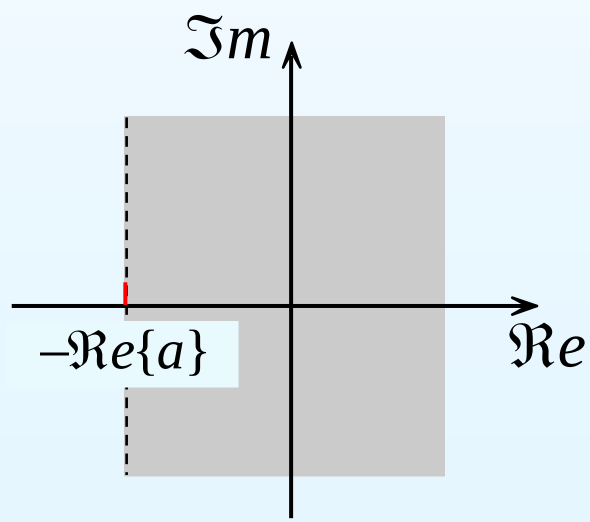
$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad \text{όπου α μιγαδικός αριθμός}$$

Απάντηση

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$



Το αιτιατού εκθετικού όταν $\Re e[a] > 0$.

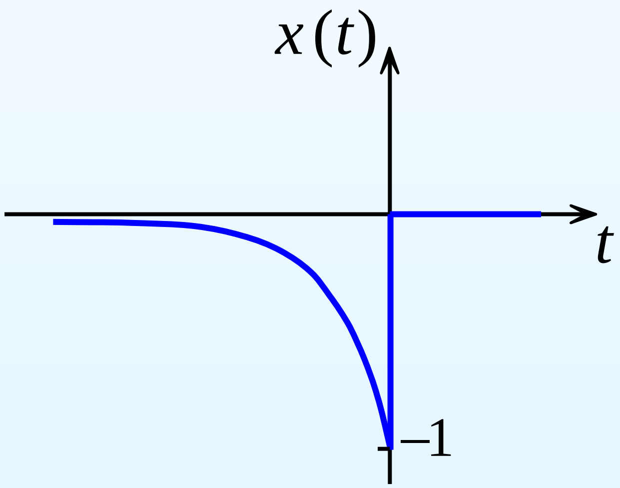


Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος

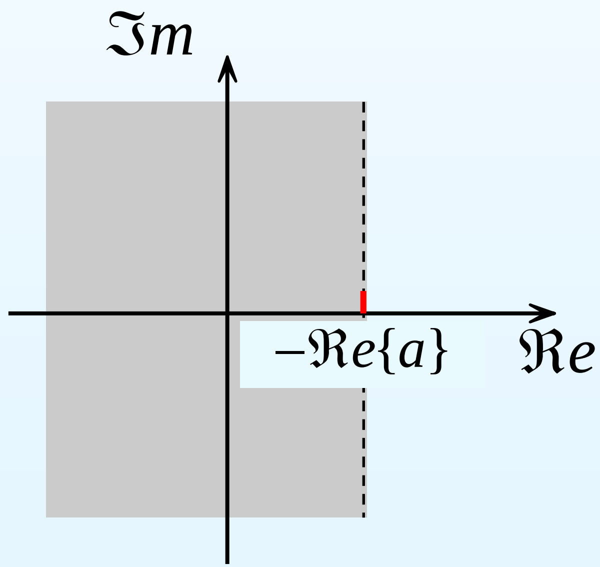
$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Απάντηση

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$



Το αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού όταν $\Re e[a] < 0$.

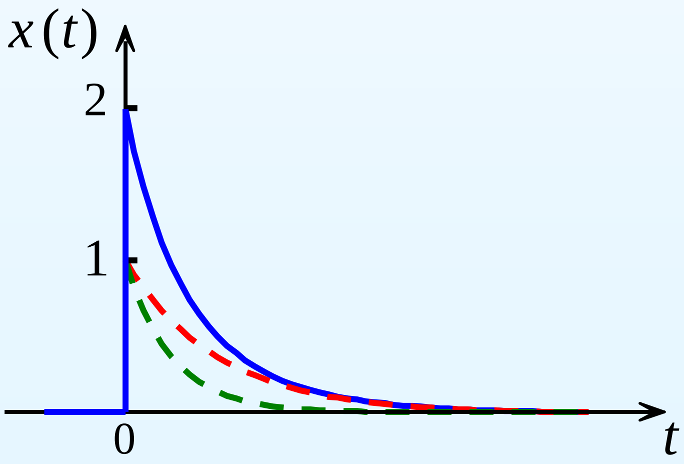


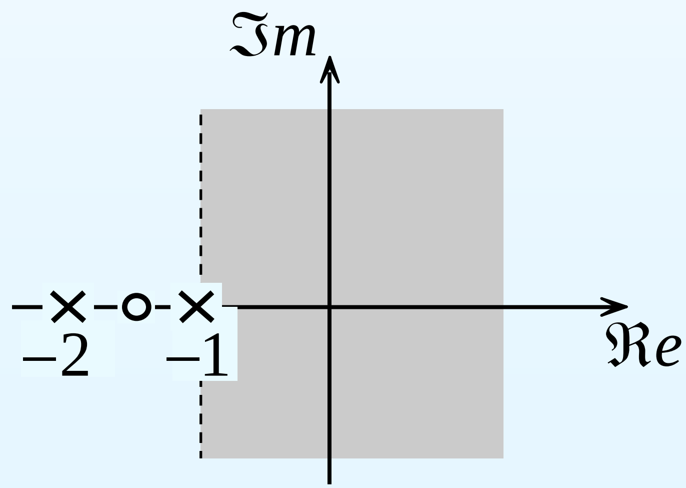
Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

Απάντηση

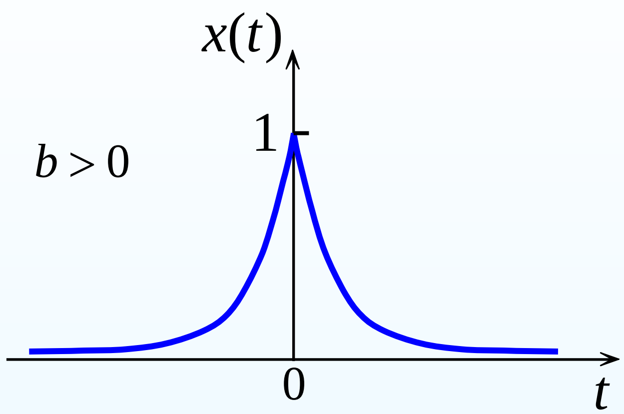
$$e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -1$$

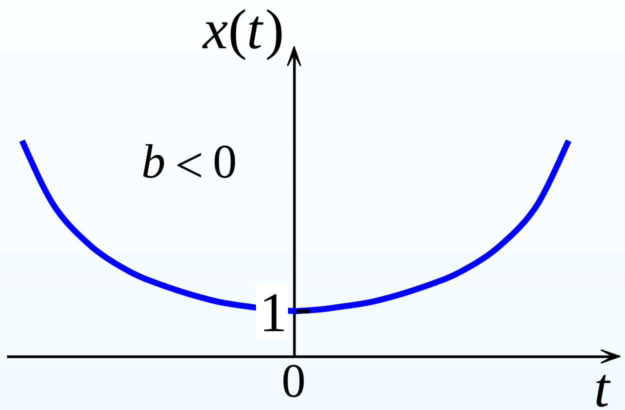




Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

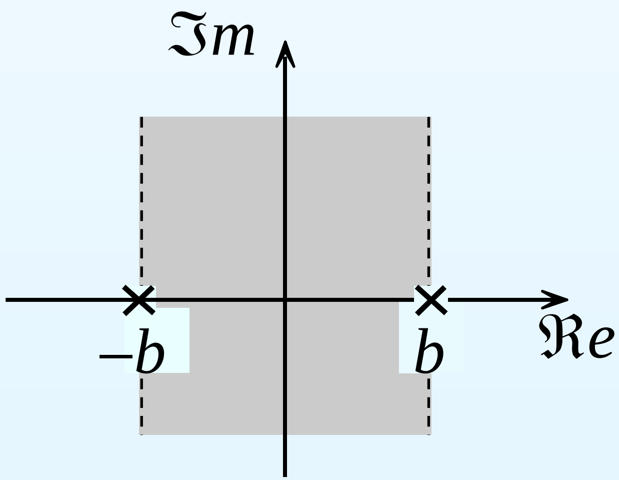




Απάντηση

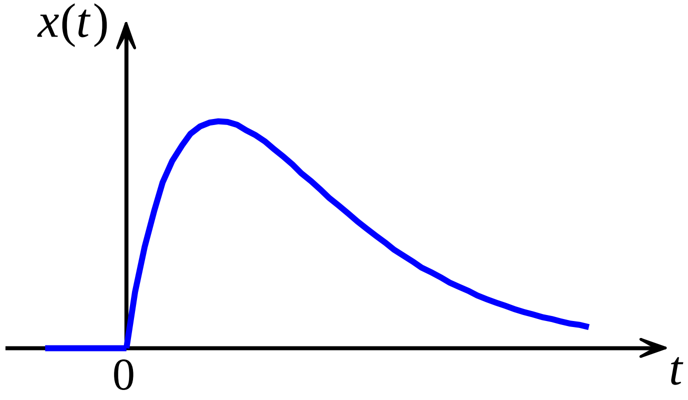
$$L\left[e^{-b|t|}\right] = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2 - b^2}$$

με περιοχή σύγκλισης $-b < \Re e\{s\} < +b$



Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = t\, e^{-a t} u(t)$$



Απάντηση

$$X(s) = L\left[\; t e^{-at} u(t) \right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$ με περιοχή σύγκλισης $\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$

Αν $\alpha = 0$ έχουμε:

$$L\left[\, t\, u(t) \,\right] = \frac{1}{s^2}$$ με περιοχή σύγκλισης $\Re e\{s\} > 0$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

- Γραμμικότητα

$$a\,x_1(t)+b\,x_2(t) \xleftrightarrow{L} a\,X_1(s)+b\,X_2(s)$$

Με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $R = R_1 \bigcap R_2$

- Μετατόπιση στο χρόνο

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0}X(s)$$

με την ίδια Π Σ R

- Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα

$$e^{s_0 t}\,x(t) \xleftrightarrow{L} X(s-s_0)$$

με Π Σ $R+\Re e\{s_0\}$

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα

Αν $x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)$ Με Π Σ $\sigma_1 < \Re e\{s\} < \sigma_2$ τότε

$$x(at) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{Με Π Σ} \quad \frac{\sigma_1}{a} < \Re e\{s\} < \frac{\sigma_2}{a}$$

Παραγώγιση στη συχνότητα

$$(-t)^n x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad \text{με την ίδια Π Σ } R$$

- Ολοκλήρωση στη συχνότητα

$$\frac{x(t)}{t} \xleftrightarrow{L} \int_{s}^{\infty} X(\xi)\, d\xi \qquad \text{με την ίδια ΠΣ } R$$

- Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) \qquad \text{με την ίδια ΠΣ } R$$

- Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$$

Με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $R \bigcap \{\Re e\{s\} > 0\}$

- Θεώρημα της συνέλιξης στο χρόνο

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

Με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $R = R_1 \bigcap R_2$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

Το ολοκλήρωμα έχει τη έννοια ότι η ολοκλήρωση εκτελείται πάνω στην ευθεία $Re[s] = \sigma$, η οποία πρέπει να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του $X(s)$.

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -1$$

Απάντηση

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = -\frac{2b}{s^2-b^2} \quad -b < \Re e\{s\} < +b$$

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^2(s-2)}$$ με περιοχή σύγκλισης $\Re e\{s\} > 2$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} X(s) = -\frac{2b}{s^2-b^2} \quad -b < \Re e\{s\} < +b$$

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -2$$

Μιγαδικές ρίζες $\rho_1 = -2-3j$ και $\rho_2 = -2+3j$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} X(s) = -\frac{2b}{s^2-b^2} \quad -b < \Re e\{s\} < +b$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad U(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

$$e^{-at}x(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s+a)$$

$$L\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)\right\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

$$L\left\{e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)\right\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} = \frac{s+2}{s^2+4s+4+9} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} = \quad x(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t)$$

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{s^2+5s+15}{s^2+4s+13}$$ με περιοχή σύγκλισης $\Re e\{s\} > -2$

Απάντηση

$$X(s) = \frac{s^2+4s+13}{s^2+4s+13} + \frac{s+2}{s^2+4s+13} = 1 + \frac{s+2}{s^2+4s+13} = 1 + \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$$

$$x(t) = \delta(t) + e^{-2t}\cos(3t)\,u(t)$$

Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{X}(s) = X^{+}(s) \equiv \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

- Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\,\mathcal{X}(s) - x(0^{-})$$

- Ολοκλήρωση στο χρόνο

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^{-}} x(\tau)\, d\tau$$

Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$$

- Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής

$$x(0^{+}) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \mathcal{X}(s) \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \mathcal{X}(s)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

- Επίλυση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

- Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

- Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\,x(t)}{dt} + 3\,x(t) + 2\int_{-\infty}^{t} x(\xi)d\xi = u(t)$$

με αρχικές συνθήκες: $x(0^-) = 2$ και $\int_{-\infty}^{0^-} x(\xi)\,d\xi = 0$

- Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\,\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

- Ολοκλήρωση στο χρόνο

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$$

Απάντηση

$$\mathcal{X}(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \left[-e^{-t} + 3e^{-2t}\right]u(t)$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(s) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{ΓΧΑ} \\ h(t) \quad H(s) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ Y(s) \end{matrix}$$

- Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

- Το σήμα εισόδου, $x(t)$, και το σήμα εξόδου, $y(t)$, ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad\qquad y(t) = x(t) * h(t)$$

- Τα σήματα εισόδου-εξόδου συσχετίζονται με τη διαφορική εξίσωσης.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Το θεώρημα της Συνέλιξης.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Παρατηρούμε ότι η ***συνάρτηση μεταφοράς***, $H(s)$, ενός συστήματος μπορεί να βρεθεί, ως πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace εξόδου-εισόδου.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Υπενθυμίζεται ότι

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

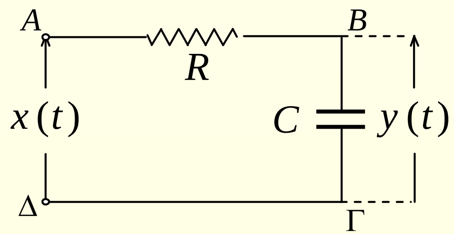
$$H(s) = L\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

Η ***ευστάθεια*** και η ***αιτιότητα*** προσδιορίζουν την περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ***ρητή συνάρτηση***, δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής s.

Σημειώνεται επίσης στον υπολογισμό της $H(s)$ ενός συστήματος ***δεν υπεισέρχονται οι αρχικές συνθήκες*** στις οποίες βρίσκεται πιθανόν το σύστημα.

Για το ηλεκτρικό κύκλωμα RC σε σειρά



η διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε διαδοχικά

$$L\left\{\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t)\right\} = L\{b\,x(t)\}$$

$$L\left\{\frac{d\,y(t)}{dt}\right\} + a\,L\{y(t)\} = bL\,\{x(t)\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} s\,X(s)} s \cdot Y(s) + a\,Y(s) = b\,X(s)$$

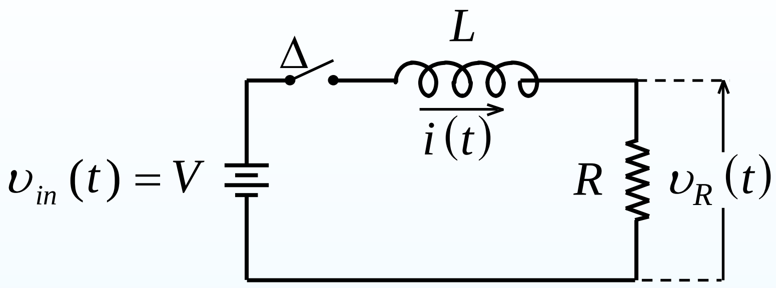
$$\left.\begin{aligned} &(s+a)\cdot Y(s) = b\,X(s) \\ &H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \end{aligned}\right\} H(s) = \frac{b}{s+a}$$

Με περιοχή σύγκλισης

$$\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \xrightarrow{e^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}} h(t) = b\,e^{-at}u(t)$$

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του κυκλώματος



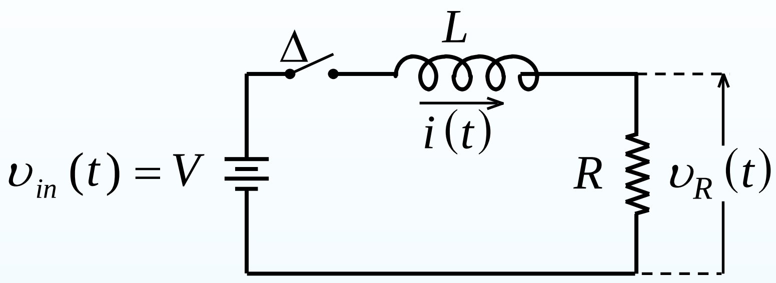
Απάντηση

Η διαφορική εξίσωση για το σύστημα είναι $$\frac{d\,\upsilon_R(t)}{d\,t} + \frac{R}{L}\upsilon_R(t) = \frac{R}{L}\upsilon_{in}(t)$$

η συνάρτηση μεταφοράς είναι $$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L} \qquad \Re e\{s\} > -R/L$$

και η κρουστική απόκριση είναι $$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

Αν το κύκλωμα αρχικά ηρεμεί, και στην είσοδό του, κατά τη χρονική στιγμή t_0=0, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V, να προσδιοριστεί η τάση $\upsilon_R(t)$ στα άκρα της αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L} \qquad \Re e\{s\} > -R/L$$

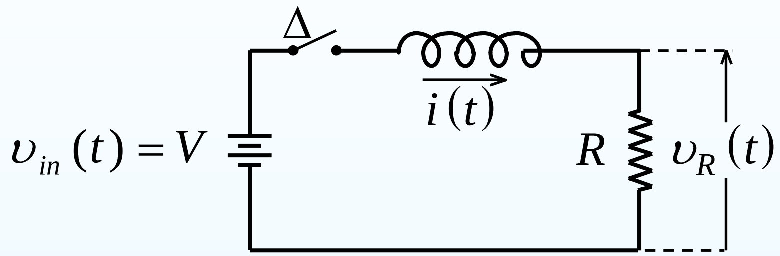
Απάντηση

$$V_R(s) = H(s) \cdot V_{in}(s) \qquad V_R(s) = V \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

$$\upsilon_R(t) = Vu(t) - Ve^{-\frac{R}{L}t}u(t) = V\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

$$V_R(s) = V\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) \qquad \upsilon_R(t) = V\,u(t) - V e^{-\frac{R}{L}t}u(t) = V\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

Αν η τάση στα άκρα της αντίστασης αρχικά είναι $\upsilon_R(0^-) = 1$ και στην είσοδό του, κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης $V = 2$, να προσδιοριστεί η τάση $\upsilon_R(t)$ στα άκρα της αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η διαφορική εξίσωση για το σύστημα είναι $$\frac{d\,\upsilon_R(t)}{d\,t} + \frac{R}{L}\upsilon_R(t) = \frac{R}{L}\upsilon_{in}(t)$$

- Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s\,\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

- Ολοκλήρωση στο χρόνο

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$$

$$\upsilon_R(t) = V\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t) + \upsilon_R(0^-)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}u(t) = \left[V - \left(\upsilon_R(0^-) - V\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right]u(t)$$

Αν ***έχουμε αρχικές συνθήκες*** τότε στη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

συμπεριλαμβάνουμε τις αρχικές συνθήκες λόγω των ιδιοτήτων της παραγώγισης στο χρόνο και της ολοκλήρωσης στο χρόνο που έχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace.

- Παραγώγιση στο χρόνο $\quad \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
- Ολοκλήρωση στο χρόνο $\quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$

και στην $Y(s) = H(s)\,X(s)$ εμφανίζεται και ένας ***επιπλέον όρος*** ο οποίος προέρχεται από ***τις αρχικές συνθήκες***.

Σημειώνεται ότι η ***συνάρτηση μεταφοράς*** ενός συστήματος είναι ανεξάρτητη της εισόδου και των αρχικών συνθηκών και ότι ***εξαρτάται μόνο από τα στοιχεία του συστήματος***.

Να προσδιορισθεί η αρχική και η τελική τιμή του σήματος του αποίου ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$X^+(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αρχικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{7s+10}{s(s+2)} = \lim_{s\to\infty}\frac{7s+10}{(s+2)} = 7$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{7s+10}{s(s+2)} = \lim_{s\to\infty}\frac{7s+10}{(s+2)} = 5$$

Το σήμα $x(t)$ που έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace είναι

$$x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

και επαληθεύουμε ότι $x(0^+) = 7$ και $x(\infty) = 5$.

Παρατηρήσεις για το μετασχηματισμό Laplace

Η συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ***ρητή συνάρτηση***, δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής s.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Για να είναι ένα σύστημα ***αιτιατό*** πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το ***δεξιό ημιεπίπεδο*** του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-Re\{a_k\}|_{\max}$.

Αν ο βαθμός του πολυωνύμου του $N(s)$ είναι ***μεγαλύτερος ή ίσος*** από το βαθμό του πολυωνύμου $D(s)$, τότε, πριν αναλύσουμε σε απλά κλάσματα, ***πρέπει*** να κάνουμε τη διαίρεση $N(s) / D(s)$.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum c_k \cdot s^k + \frac{N'(s)}{D(s)}$$

Για να είναι ένα σύστημα ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** θα πρέπει ο βαθμός του πολυωνύμου N(s) να είναι ***μικρότερος*** από το βαθμό του πολυωνύμου D(s).

Ένα ΓΧΑ σύστημα ***είναι ΦΕΦΕ ευσταθές***, αν η κρουστική απόκρισή του είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή, αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, h(t) \,|\, dt < +\infty$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ο MF και αυτό πραγματοποιείται ***όταν το πεδίο σύγκλισης του ML περιέχει το φανταστικό άξονα***.

$$F\left\{x(t)\right\} = X\,(s)\Big|_{s=j\omega}$$

Για να είναι ένα σύστημα ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** θα πρέπει ο φανταστικός άξονας να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace.

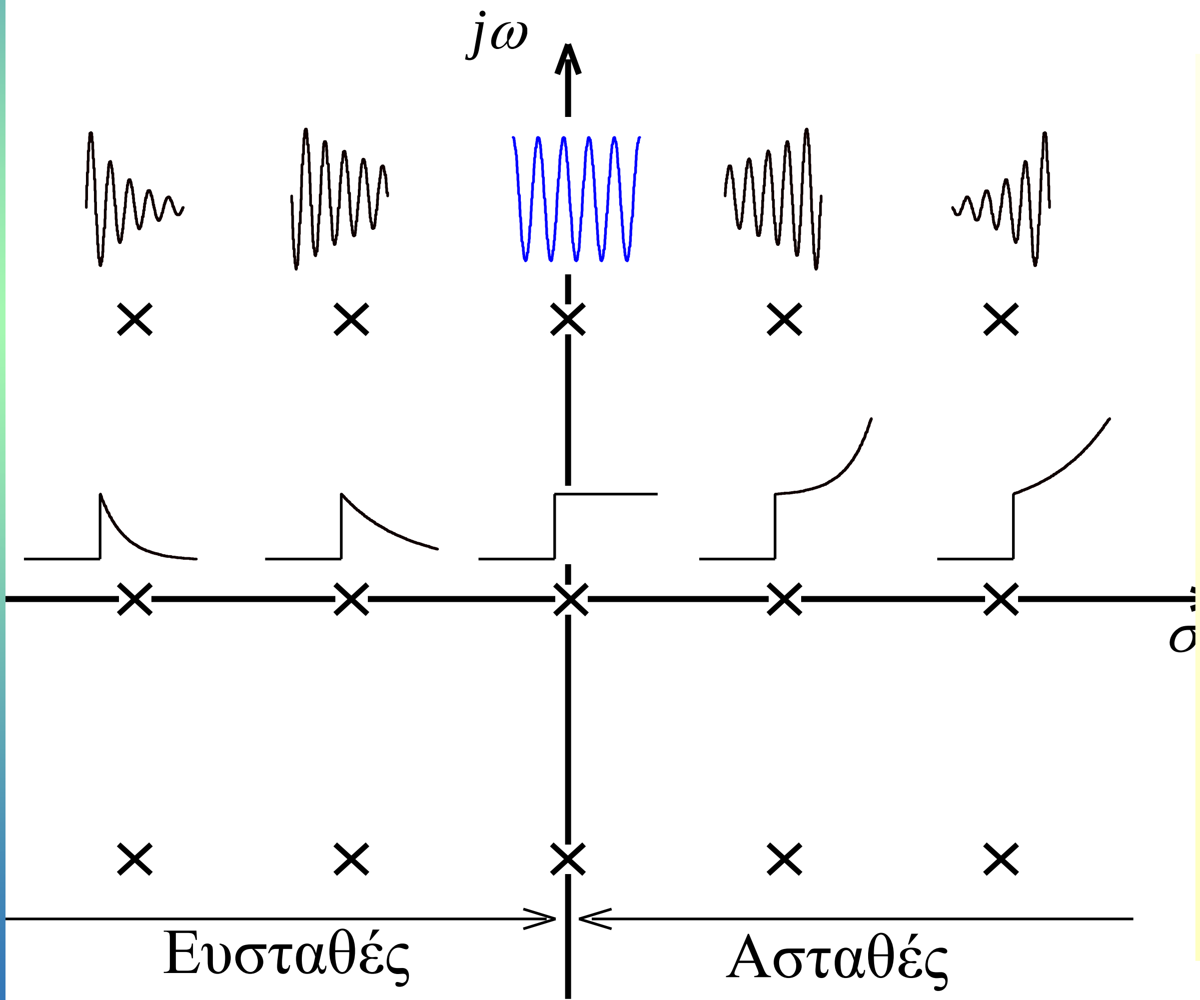
Για να είναι ένα σύστημα ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** θα πρέπει ο βαθμός του πολυωνύμου $N(s)$ να είναι ***μικρότερος*** από το βαθμό του πολυωνύμου $D(s)$.

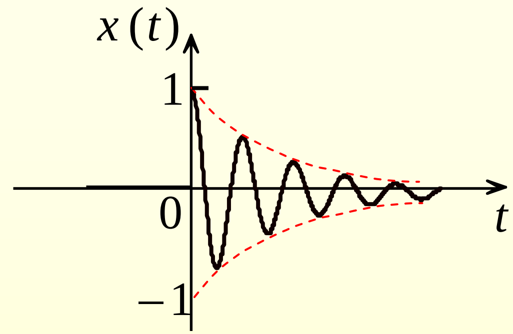
Για να είναι ένα σύστημα ***αιτιατό*** πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το ***δεξιό ημιεπίπεδο*** του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-Re\{a_k\}|_{\max}$.

Η ***θέση των πόλων*** ενός σήματος στο μιγαδικό επίπεδο ***προσδιορίζει τη συμπεριφορά*** του σήματος.

Η ***θέση των πόλων*** ενός σήματος στο μιγαδικό επίπεδο ***προσδιορίζει τη συμπεριφορά*** του σήματος.

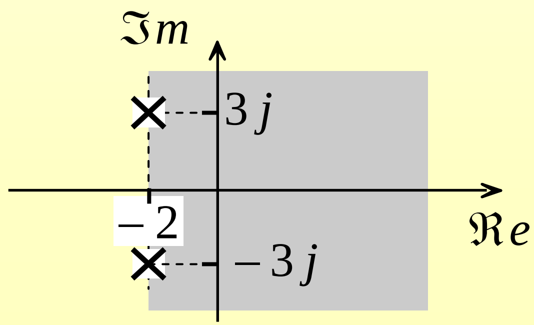
Παρατηρήσεις για την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace





$$x(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t)$$

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$$

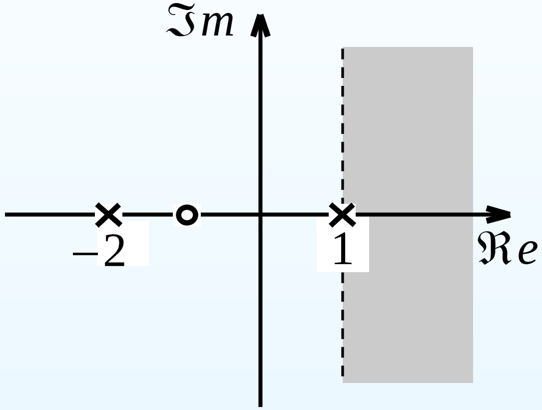


Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}$$

Απάντηση:

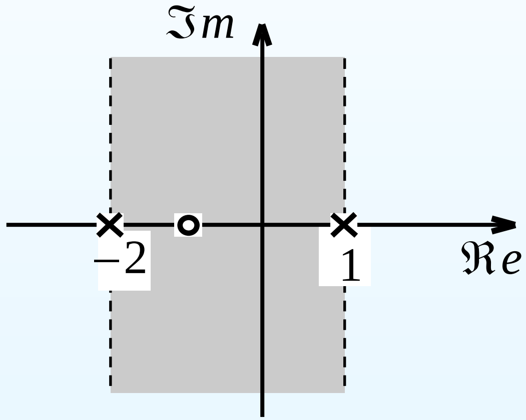
$\Re e\{s\} > 1$



Αιτιατό σύστημα

$$h(t) = \left[\tfrac{1}{3}e^{-2t} + \tfrac{2}{3}e^{t}\right]u(t)$$

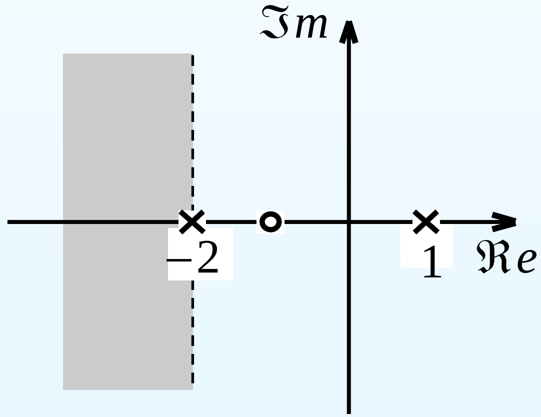
$-2 < \Re e\{s\} < 1$



Ευσταθές σύστημα

$$h(t) = \tfrac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \tfrac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

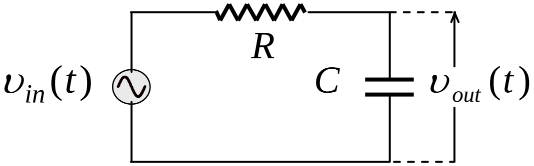
$\Re e\{s\} < -2$

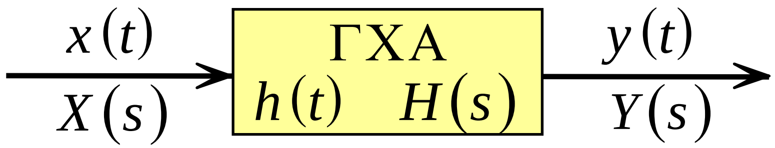


Μη αιτιατό μη ευσταθές σύστημα

$$h(t) = -\tfrac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \tfrac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

Συστήματα Αναλογικού Χρόνου



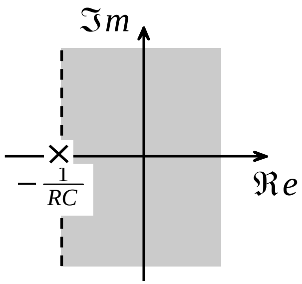


Τα σήματα εισόδου-εξόδου συσχετίζονται με τη διαφορική εξίσωσης.

$$\frac{d\upsilon_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\upsilon_{out}(t) = \frac{1}{RC}\upsilon_{in}(t) \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \qquad H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$



$$\Re e\{s\} > -\frac{1}{RC}$$

Η ευστάθεια και η αιτιατότητα προσ-διορίζουν την περιοχή σύγκλισης

Στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός Laplace έχει πόλους στο φανταστικό άξονα, όπως το σήμα

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Το σήμα έχει και μετασχηματισμό Fourier και είναι

$$X(\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{1}{2}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$$

Για την οριακή αυτή περίπτωση, στην οποία υπάρχουν πόλοι στο φανταστικό άξονα, είναι δυνατή η μετάβαση από το μετασχηματισμό Laplace στο μετασχηματισμό Fourier.

Η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως άθροισμα δύο συναρτήσεων της μεταβλητής s, όπου η μία είναι αναλυτική στο φανταστικό άξονα και η άλλη περιέχει τους πόλους, δηλαδή

$$X(s) = X_a(s) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s - j\omega_k}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier βρίσκεται από τη σχέση

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{k=1}^{N} b_k \, \delta(\omega - \omega_k)$$

δηλαδή στη συνάρτηση $X(s)|_{s\,=\,j\omega}$ προσθέτουμε τους κατάλληλους όρους κρουστικών συναρτή-σεων

Εφαρμογή

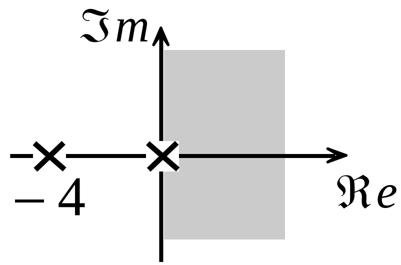
$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{k=1}^{N} b_k \delta(\omega - \omega_k)$$

Το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-4t}\right] u(t)$$

έχει μετασχηματισμό Laplace

$$H(s) = \frac{2}{s(s+4)}$$ με διάγραμμα πόλων μηδενικών και πεδίο σύγκλισης



Ο μετασχηματισμός Laplace γράφεται ως

$$H(s) = H_a(s) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s - j\omega_k}$$

$$H(s) = \frac{2}{s(s+4)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}$$

Από την οποία μεταβαίνουμε στο μετασχηματισμό Fourier

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{1}{2}\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega+4)} + \frac{1}{2}\pi\delta(\omega)$$

ή ισοδύναμα ως

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+4}$$

Βαθυπερατά συστήματα πρώτης τάξης.

Τα βαθυπερατά ΓΧΑ σύστημα πρώτης τάξης περιγράφονται από τη διαφορική εξίσωση

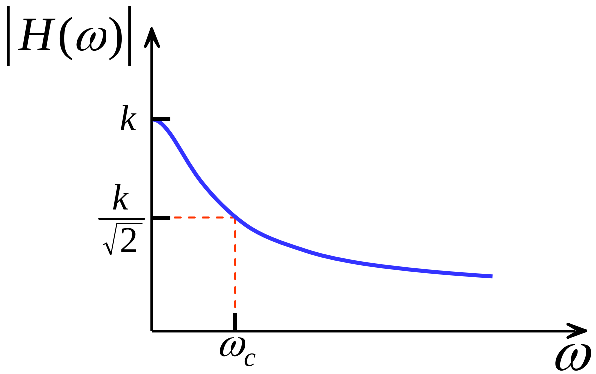
$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς των βαθυπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{k}{1+\frac{s}{\omega_c}}$$

Η απόκριση συχνότητας των βαθυπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$



Απόκριση πλάτους βαθυπερατού συστήματος πρώτης τάξης

Υψιπερατά συστήματα πρώτης τάξης.

Τα υψιπερατά ΓΧΑ σύστημα πρώτης τάξης περιγράφονται από τη διαφορική εξίσωση

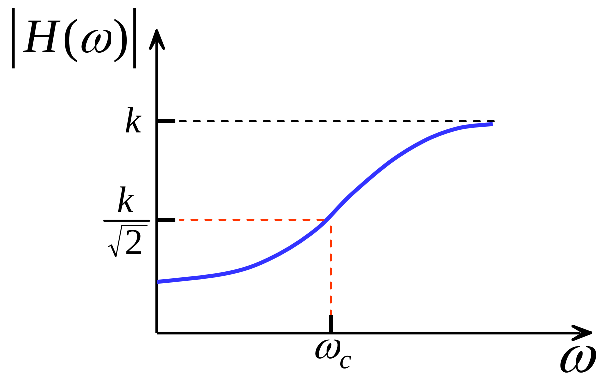
$$\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t) = b\frac{d\,x(t)}{dt}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς των υψιπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(s) = \frac{bs}{s+a} = \frac{ks}{s+\omega_c}$$

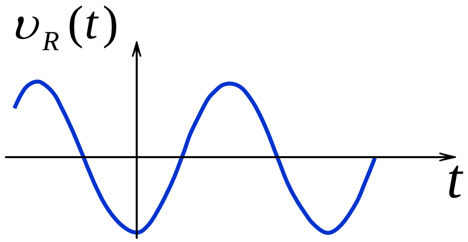
Η απόκριση συχνότητας των υψιπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

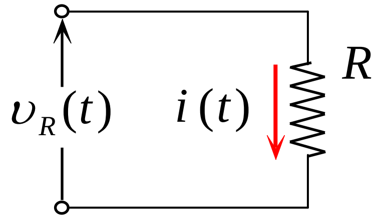
$$H(j\omega) = \frac{b\,s}{j\omega + a} = \frac{k}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}}$$

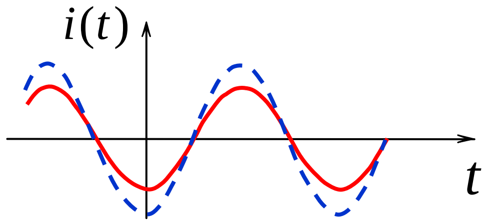


Απόκριση πλάτους υψιπερατού συστήματος πρώτης τάξης

α) Το ωμικό στοιχείο εμφανίζει ***αντίσταση R*** και η ένταση ρεύματος που τη διαρρέει βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την τάση στα άκρα της.

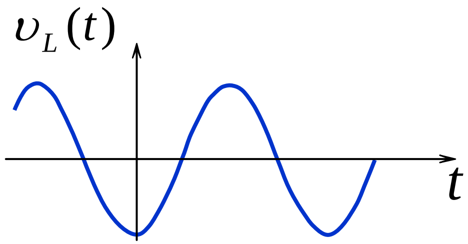


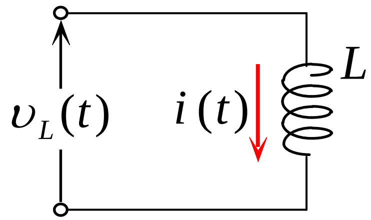


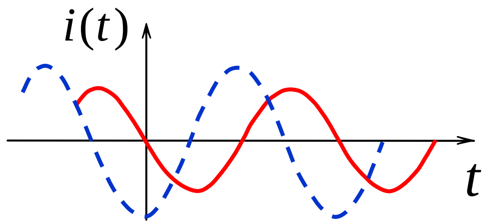


$$i(t) = \frac{\upsilon_R(t)}{R}$$

β) Το πηνίο εμφανίζει ***επαγωγική αντίσταση η εμπέδηση $Z_L = jL\omega$*** και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει υστερεί της τάσης στα άκρα του κατά π/2.

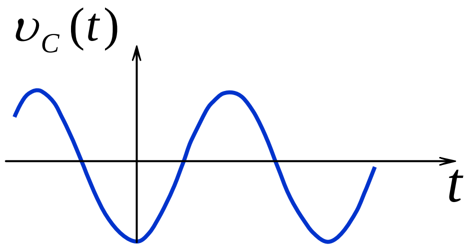


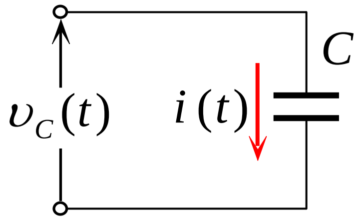


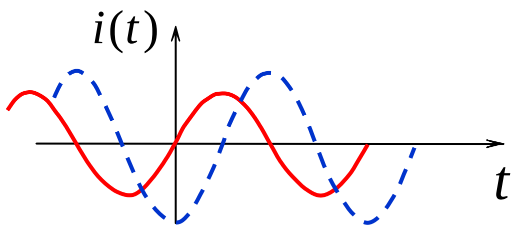


$$i(t) = \frac{\upsilon_L(t)}{Z_L}$$

γ) Ο πυκνωτής εμφανίζει ***χωρητική αντίσταση 1/Cω*** και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει βρίσκεται σε διαφορά φάσης – π/2 με την τάση στα άκρα του ***$Z_C = 1/ jC\omega$***.





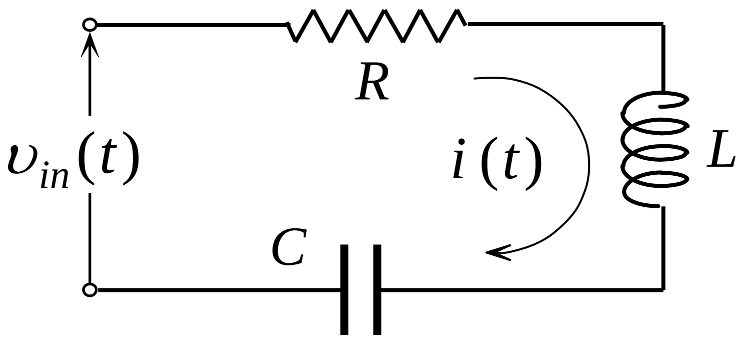


$$i(t) = \frac{\upsilon_C(t)}{Z_C}$$

δ) Η ***σύνθετη αντίσταση κυκλώματος*** είναι $Z(\omega) = U(\omega) \,/\, I(\omega)$.

Άσκηση

Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος RLC σε σειρά



$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{U_{in}(\omega)}$$

$$= \frac{j\omega}{L(j\omega)^2 + R(j\omega) + \frac{1}{C}}$$

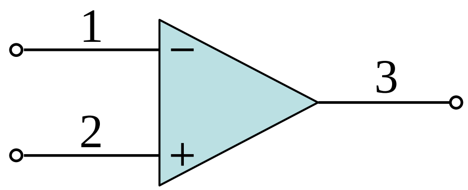
$$= \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = R + \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$Z(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2$$

Τελεστικός ενισχυτής

Το κυκλωματικό σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση του τελεστικού ενισχυτή είναι

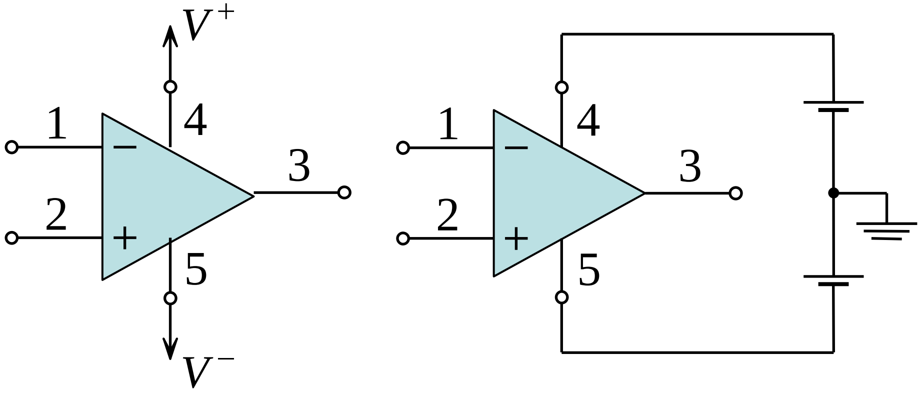


Σύμβολο τελεστικού ενισχυτή

Ο τελεστικός ενισχυτής είναι φτιαγμένος για να "αισθάνεται" τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημάτων τάσης που εφαρμόζονται στους ακροδέκτες εισόδου του $\upsilon_2(t) - \upsilon_1(t)$ και εμφανίζει τη διαφορά πολλαπλασιασμένη επί A στην έξοδό

$$\upsilon_o(t) = A\big(\upsilon_2(t) - \upsilon_1(t)\big) \quad = A\big(\upsilon_+(t) - \upsilon_-(t)\big)$$

Όταν αναφερόμαστε για τάση σε κάποιο ακροδέκτη εννοούμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του ακροδέκτη και της γης.



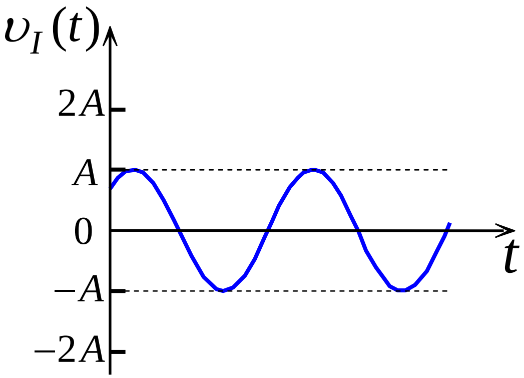
Τροφοδοσία τελεστικού ενισχυτή

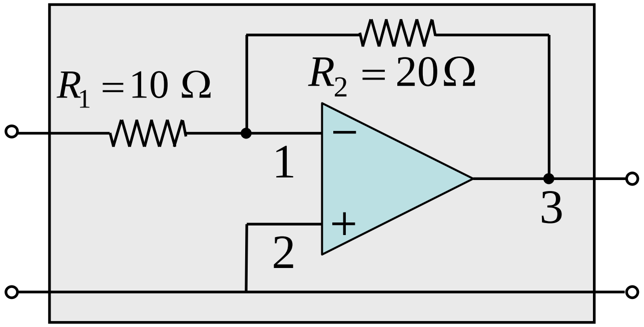
Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ενισχυτής ***διαφορικής εισόδου – μονής εξόδου*** (*differential input – single output*).

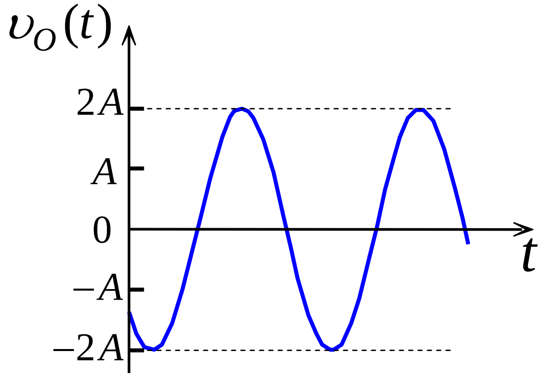
Το κέδρος A ονομάζεται ***διαφορικό κέρδος*** ή ***κέρδος ανοικτού κυκλώματος***

Εφαρμογές Αντιστρεπτός ενισχυτής τάσης (*Inverting amplifier*)

$$G \equiv \frac{\upsilon_O(t)}{\upsilon_I(t)} = -\frac{R_2}{R_1} = -2$$



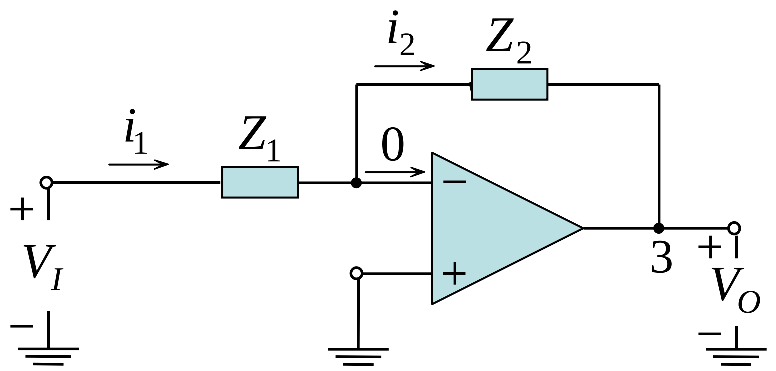




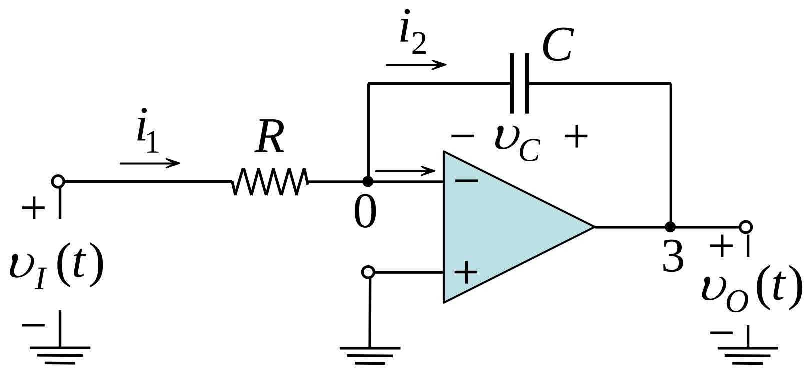
Στο παράδειγμα αρνητικής ανάδρασης αρχίσαμε με ένα τελεστικό ενισχυτή που έχει πολύ μεγάλο κέρδος A και εφαρμόζοντας αρνητική ανάδραση αποκτήσαμε ένα κέρδος κλειστού βρόχου R_2/R_1 που είναι σταθερό, προβλέψιμο και με όση ακρίβεια θέλουμε, επιλέγοντας παθητικά στοιχεία ανάλογης ακρίβειας.

Προσφορά κέρδους και αύξηση ακρίβειας.

Εφαρμογές Αντιστρεπτός ολοκληρωτής



Η αναστρέφουσα συνδεσμολογία με γενικευμένες σύνθετες αντιστάσεις στην ανάδραση και την είσοδο.



Αναστρέφων ολοκληρωτής (Miller).

Το κέρδος κλειστού βρόχου, η ποιο σωστά, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου, είναι

$$\frac{V_O}{V_I} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Για την ιδική περίπτωση όπου $Z_1 = R$ και $Z_2 = 1/sC$, η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -\frac{1}{s\,RC}$$

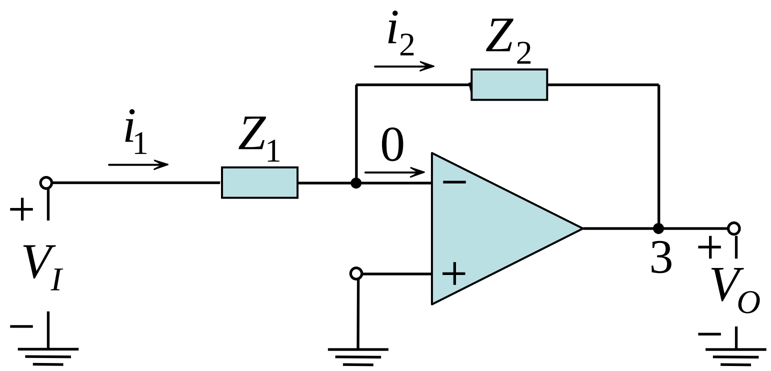
και η απόκριση συχνότητας είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -\frac{1}{j\omega\,RC}$$

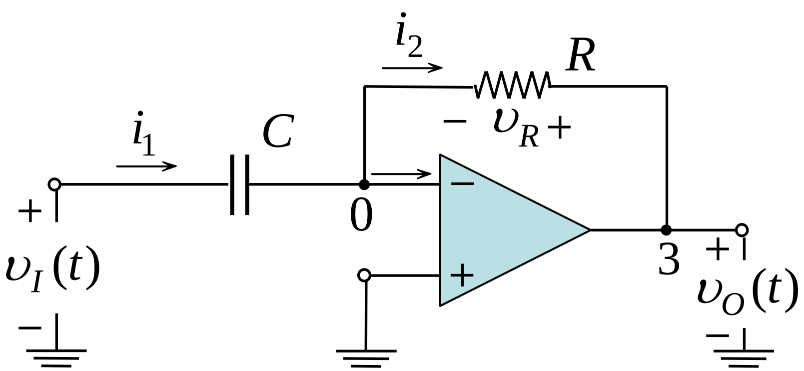
Η τάση εξόδου $\upsilon_O(t)$ είναι το ολοκλήρωμα της $\upsilon_I(t)$, δηλαδή,

$$\upsilon_O(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t \upsilon_I(\xi)\,d\xi$$

Εφαρμογές Αντιστρεπτός διαφοριστής



Η αναστρέφουσα συνδεσμολογία με γενικευμένες σύνθετες αντιστάσεις στην ανάδραση και την είσοδο.



Αναστρέφων διαφοριστής.

Το κέρδος κλειστού βρόχου, η ποιο σωστά, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου, είναι

$$\frac{V_O}{V_I} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Για την ιδική περίπτωση όπου $Z_1 = R$ και $Z_2 = 1/sC$, η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -s\,RC$$

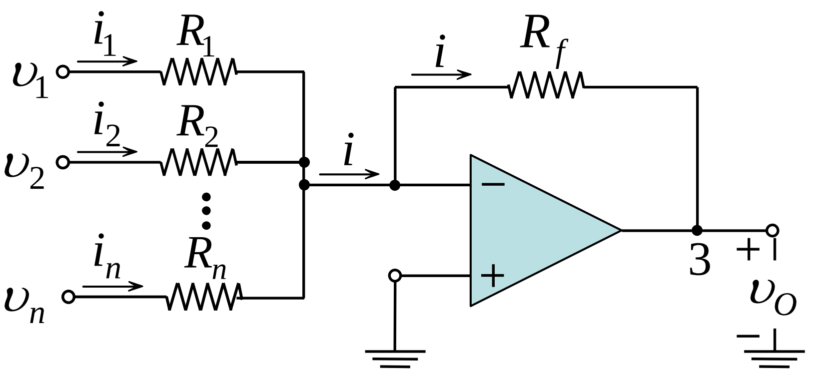
και η απόκριση συχνότητας είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -j\omega RC$$

Η τάση εξόδου $\upsilon_O(t)$ είναι το ολοκλήρωμα της $\upsilon_I(t)$, δηλαδή,

$$\upsilon_O(t) = -RC\,\frac{d\upsilon_I(t)}{dt}$$

Εφαρμογές Αθροιστής με βάρη



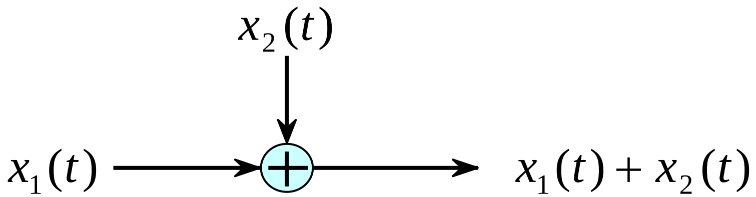
Αθροιστής με βάρη.

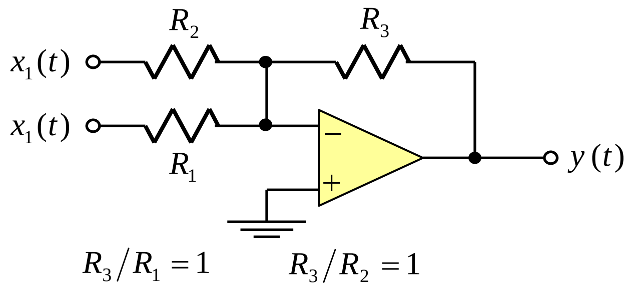
Η τάση εξόδου υ_O είναι

$$\upsilon_O = -\left(\frac{R_f}{R_1}\upsilon_1 + \frac{R_f}{R_2}\upsilon_2 +, \ldots, +\frac{R_f}{R_n}\upsilon_n\right)$$

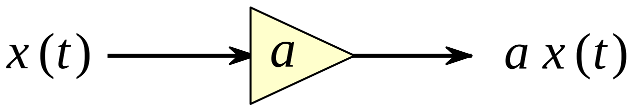
Παρατηρούμε ότι η τάση εξόδου είναι ίση με το σταθμισμένο άθροισμα των τάσεων εισόδου, με ***βάρη*** ίσα με το λόγο R_f / R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

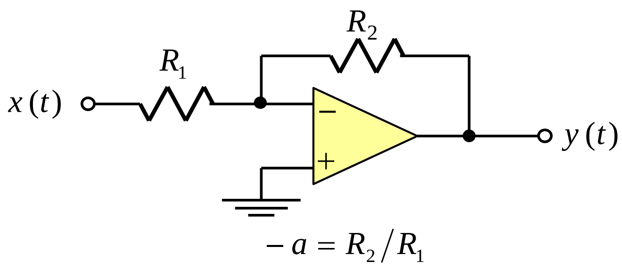
Βασικά στοιχεία υλοποίησης συστημάτων αναλογικού χρόνου



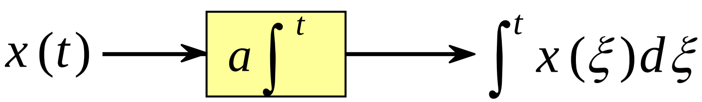


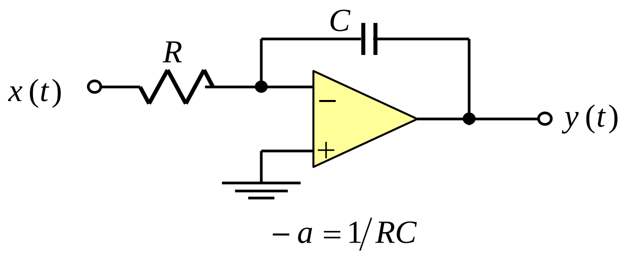
Αθροιστής





Πολλαπλασιαστής





Ολοκληρωτής

Σύστημα πρώτης τάξης με πόλους και μηδενικά

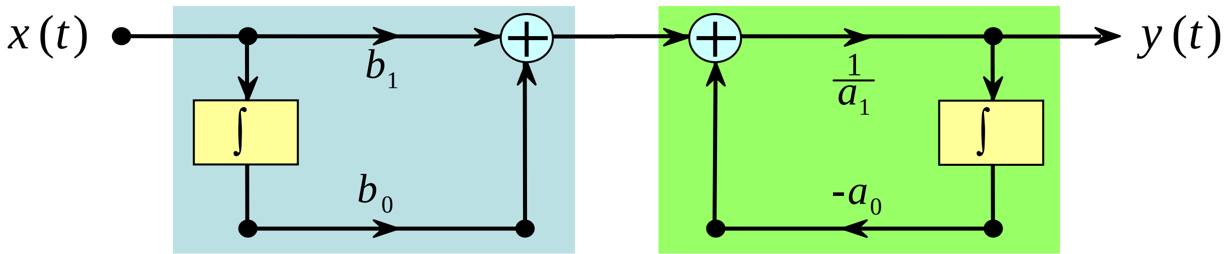
Η διαφορική εξίσωση και η συνάρτηση μεταφοράς για σύστημα πρώτης τάξης με πόλους και μηδενικά είναι

$$a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\, y(t)}{dt} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} \qquad H(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s}$$

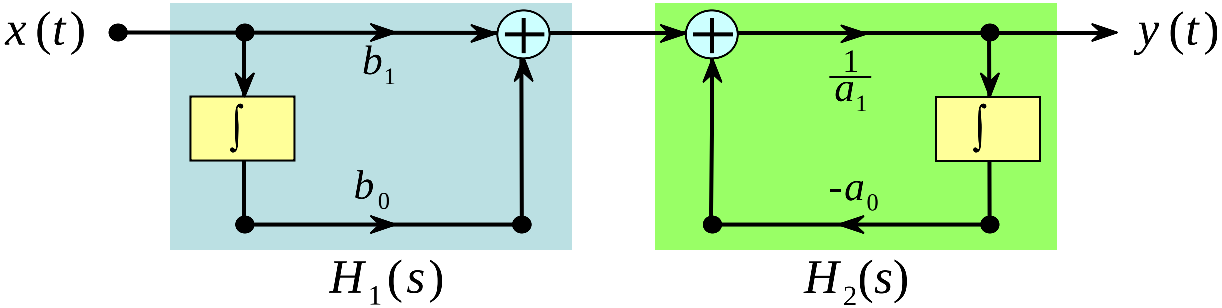
η διαφορική εξίσωση γράφεται ως

$$y(t) = \frac{1}{a_1}\left\{ -a_0 \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau + b_0 \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau + b_1\, x(t) \right\}$$

έτσι έχουμε την υλοποίηση

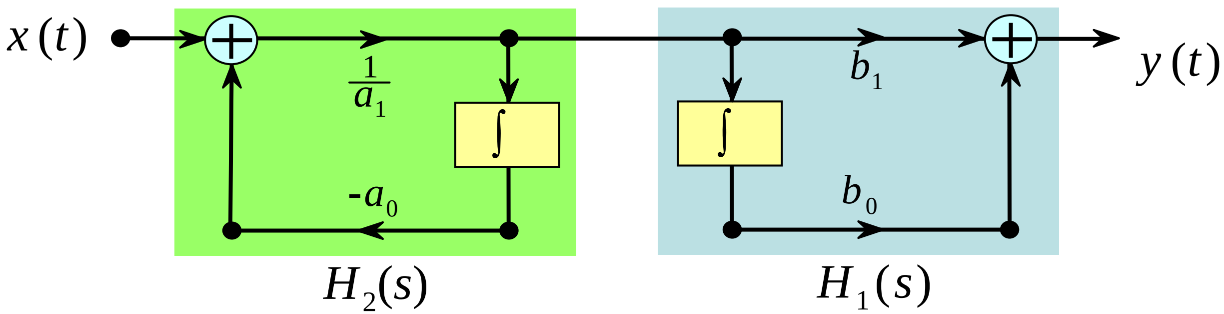


Άμεσο σχήμα Ι

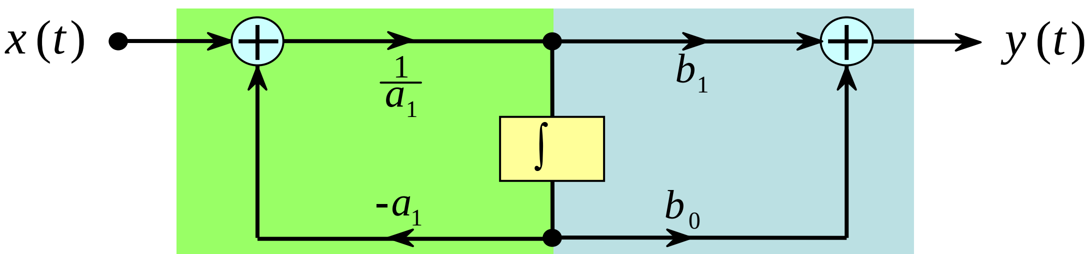


Άμεσο σχήμα I

Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσης των συστημάτων και έτσι έχουμε τη συνδεσμολογία



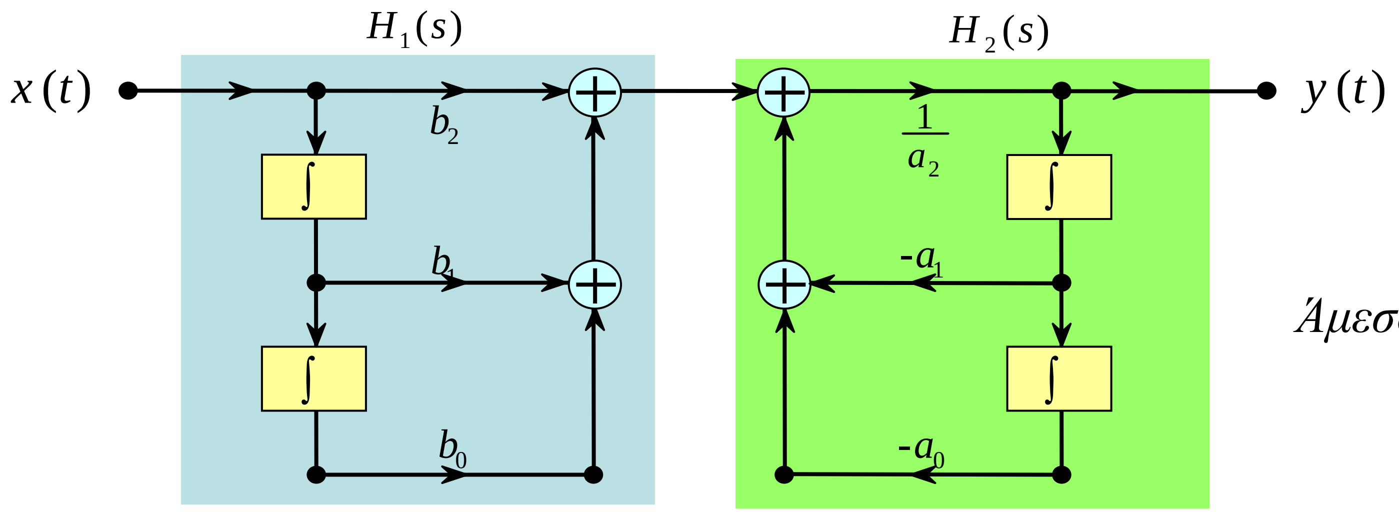
από την οποία έχουμε υλοποίηση



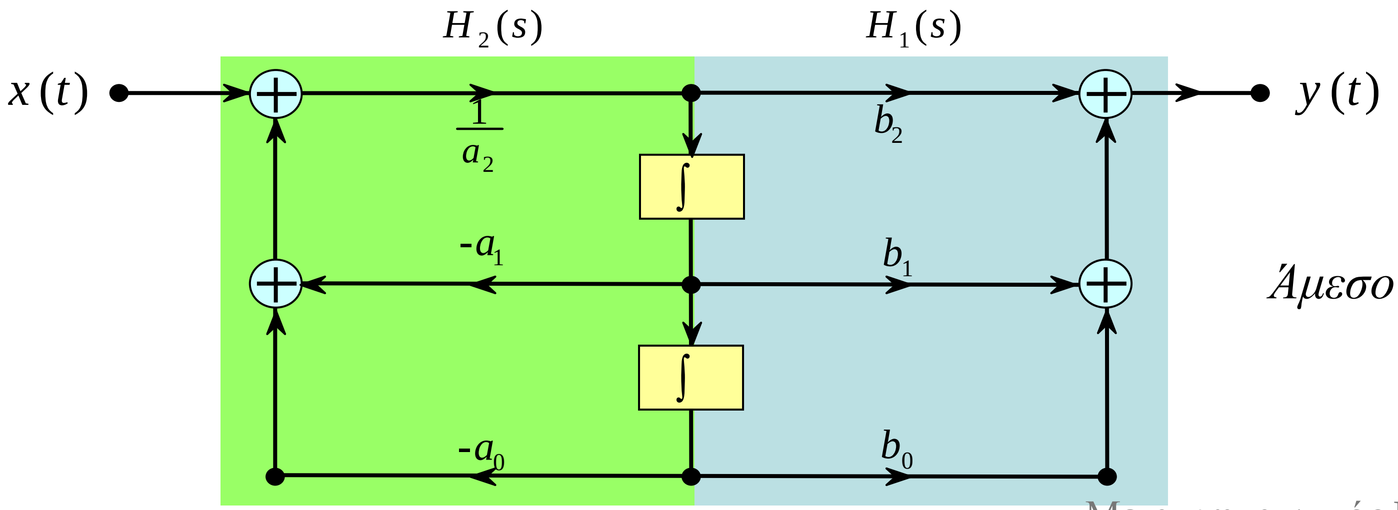
Άμεσο σχήμα I I

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

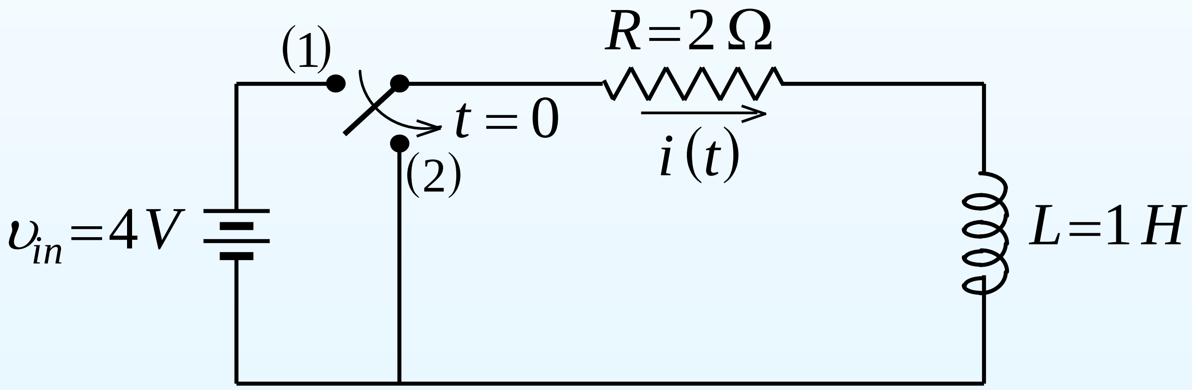


Άμεσο σχήμα I



Άμεσο σχήμα II

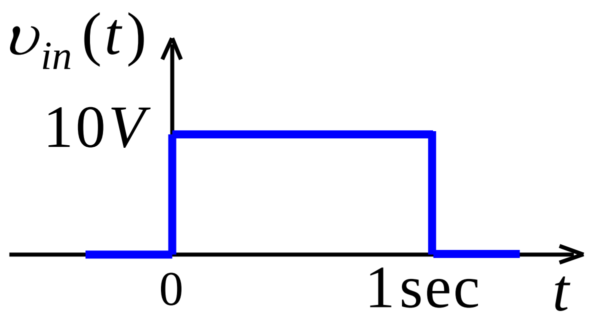
Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος. Αρχικά ο διακόπτης βρίσκεται σε επαφή στη θέση (1) και το σύστημα έχει αποκατασταθεί. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, την οποία θεωρούμε ως αρχή μετρήσεως του χρόνου, ο διακόπτης έρχεται σε επαφή στη θέση (2). Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $i(t)$, από την οποία διαρρέεται το κύκλωμα, ως συνάρτηση του χρόνου.

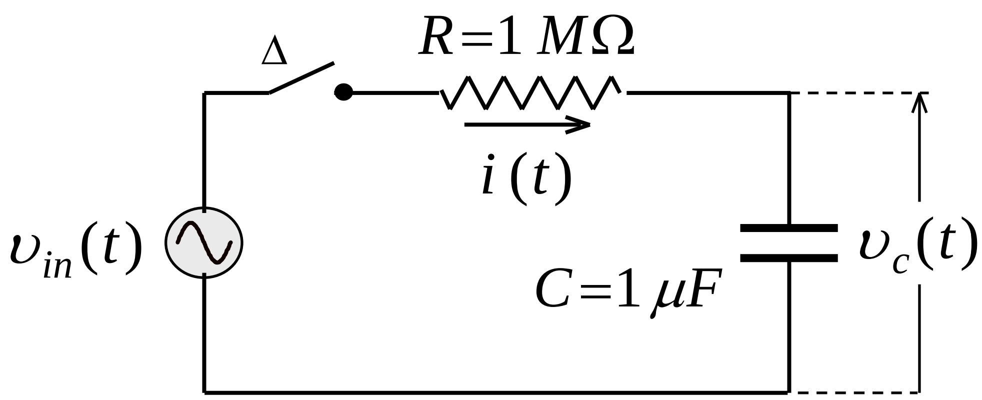


Απάντηση

$$I^+(s) = \frac{2}{s+2} \qquad i(t) = 2\,e^{-2t}u(t)$$

Στο κύκλωμα του Σχήματος ο διακόπτης Δ κλείνει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Η είσοδος του κυκλώματος $\upsilon_{in}(t)$ έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα. Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $i(t)$, από την οποία διαρρέεται το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.





Απάντηση

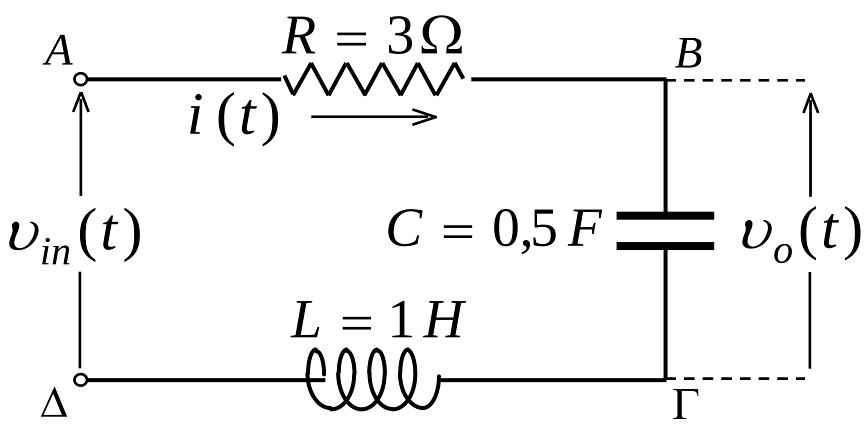
$$i(t) = 10^{-5}\left[e^{-t}u(t) - e^{-(t-1)}u(t-1)\right]$$

Για το κύκλωμα RLC που περιγράφεται στο Σχήμα

α) Να προσδιοριστεί η γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο του κυκλώματος $\upsilon_{in}(t)$ και την έξοδό του $\upsilon_o(t)$.

β) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;

γ) Αν η είσοδος του κυκλώματος είναι $\upsilon_{in}(t) = e^{-3t}u(t)$, με τη βοήθεια του MML να υπολογίσετε την έξοδο $\upsilon_o(t)$ για $t > 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $\upsilon_o(0^-) = 1$ και $d\upsilon_o(t)/dt|_{t=0} = 2$.



Απάντηση

α) Η γραμμική διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{d^2\upsilon_0(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\upsilon_0(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\upsilon_0(t) = \frac{1}{LC}\upsilon_{in}(t)$$

β) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{1}{LC\,s^2 + RC\,s + 1} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = 2\left[e^{-t} - e^{-2t}\right]u(t)$$

γ) Η έξοδος του συστήματος είναι

$$\upsilon_0(t) = 5e^{-t}u(t) - 5e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Με τη βοήθεια του Μετασχηματισμού Laplace να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος που έχει κρουστική απόκριση

$$x(t) = u(t) - u(\mathrm{t} - 1)$$

όταν η είσοδός του είναι το σήμα:

$$h(t) = u(t) - u(\mathrm{t} - 2)$$

Απάντηση

$$y(t) = t\,u(t) - (t-1)\,u(t-1) - (t-2)\,u(t-2) + (t-3)\,u(t-3)$$

$$y(t)=t\,u(t)-(t-1)\,u(t-1)-(t-2)\,u(t-2)+(t-3)\,u(t-3)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t<2 \\ 3-t, & 2\le t<3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$