4. ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

- Υπολογίζουμε εύκολα τον αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης χωρίς να καταφεύγουμε στην εξίσωση ανάλυσης.

- Υπολογίζουμε εύκολα την απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος από τη διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

- Υπολογίζουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος του οποίου έχουμε προσδιορίσει, με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης, το Μετασχηματισμό Fourier της.

- Εξηγήσουμε έννοιες όπως ***ιδανικό κατωπερατό φίλτρο ή χαμηλοπερατό***, ***ζωνοπερατό*** και ***υψηπερατό***, ***χρονική σταθερά***, ***ζώνη διέλευσης*** και ***συχνότητα αποκοπής***.

- Περιγράψουμε τι είναι ***διαγράμματα Bode*** και εξηγήσουμε έννοιες όπως **decibel** και ***σημείο* -3dB**.

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(\omega) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \Gamma X A \\ h(t) \quad H(\omega) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ Y(\omega) \end{matrix}$$

► Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

► Το σήμα εισόδου, $x(t)$, και το σήμα εξόδου, $y(t)$, ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

► Τα σήματα εισόδου-εξόδου συσχετίζονται με τη διαφορική εξίσωσης.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

► Το θεώρημα της Συνέλιξης.

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ μπορεί να βρεθεί, ως πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εξόδου-εισόδου.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Και με τη βοήθεια της $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{k} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ έχουμε

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$, ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ***ρητή συνάρτηση***, δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής ($j\omega$).

Σημειώνεται επίσης στον υπολογισμό της $H(\omega)$ ενός συστήματος δεν υπεισέρχονται οι αρχικές συνθήκες στις οποίες βρίσκεται πιθανόν το σύστημα.

Σύστημα πρώτης τάξεως

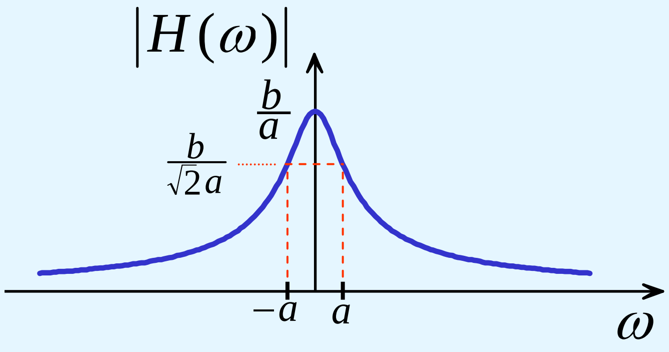
- Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος πρώτης τάξεως το οποίο χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση:

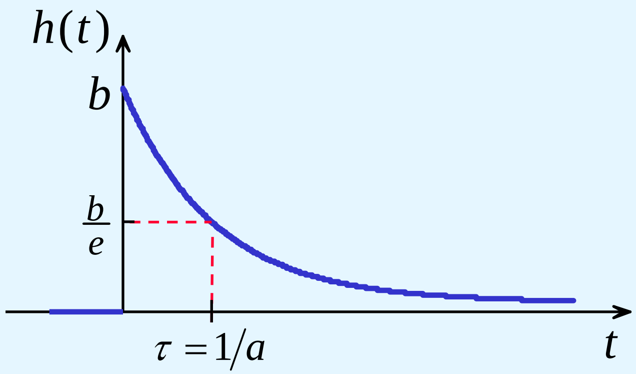
$$\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

Απάντηση

$$H(\omega) = \frac{b}{j\omega + a}$$

$$h(t) = be^{-at}u(t)$$





Η παράμετρος τ ονομάζεται ***σταθερά χρόνου*** του κυκλώματος, ενώ η συχνότητα $1/\tau$, ***φυσική συχνότητα*** του κυκλώματος.

- Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος δεύτερης τάξεως το οποίο χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

Απάντηση

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

$$H(\omega) = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+3}$$

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

$$f(x) = \frac{b_1 x + b_0}{x^2 + a_1 x + a_0} = \frac{b_1 x + b_0}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)} = \frac{c_1}{(x-\rho_1)} + \frac{c_2}{(x-\rho_2)}$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις

$$c_1 = (x-\rho_1)\cdot f(x)\Big|_{x=\rho_1} \qquad \text{και} \qquad c_2 = (x-\rho_2)\cdot f(x)\Big|_{x=\rho_2}$$

Υπενθυμίζεται και το ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier

$$x(t) = e^{-a\,t}u(t) \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

- Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος του ΓΧΑ συστήματος δεύτερης τάξεως το οποίο χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑ}} \longrightarrow y(t) =;$$

Απάντηση

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$

Ανάπτυξη ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

$$f(x) = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x-\rho_1)^2 (x-\rho_2)} = \frac{c_{11}}{x-\rho_1} + \frac{c_{12}}{(x-\rho_1)^2} + \frac{c_{21}}{x-\rho_2}$$

Οι σταθερές c_{12} και c_{21} υπολογίζονται όπως και προηγουμένως από τις

$$c_{12} = (x-\rho_1)^2 \cdot f(x)\Big|_{x=\rho_1} \quad \text{και} \quad c_{21} = (x-\rho_2) \cdot f(x)\Big|_{x=\rho_2}$$

ενώ η σταθερά c_{11} υπολογίζεται από την

$$c_{11} = \frac{d}{dx}(x-\rho_1)^2 \cdot f(x)\Big|_{x=\rho_1}$$

Από το ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega + a}$ με τη βοήθεια της παραγώγισης στο πεδίο συχνότητας $t \cdot x(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$ έχουμε

$$t \cdot e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(j\omega + a)^2}$$

Προσδιορισμός συστήματος από την είσοδό του και έξοδό του

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σε σήμα εισόδου $x(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι $y(t) = e^{-t}u(t)$
Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και η κρουστική απόκριση.

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = ;} \longrightarrow y(t) = e^{-t}u(t)$$

Απάντηση

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$y(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} Y(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$H(\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$H(\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega} = 1 + \frac{1}{1+j\omega}$$

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

Σημειώνεται ότι όταν το σήμα εισόδου είναι σήμα μίας συχνότητας θα πρέπει και το σήμα εξόδου να είναι σήμα της ίδιας συχνότητας και στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται μόνο η τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα του σήματος εισόδου.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

Ο MF του σήματος εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \qquad \left| Y(\omega) \right| e^{j \arg Y(\omega)} = \left| H(\omega) \right| e^{j \arg H(\omega)} \cdot \left| X(\omega) \right| e^{j \arg X(\omega)}$$

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)|$$

$$\arg Y(\omega) = \arg H(\omega) + \arg X(\omega)$$

Όπου $|H(\omega)|$ είναι ***η απόκριση πλάτους*** και arg$H(\omega)$ ***η απόκριση φάσης*** του συστήματος και $X(\omega)$ ο MF του σήματος εισόδου.

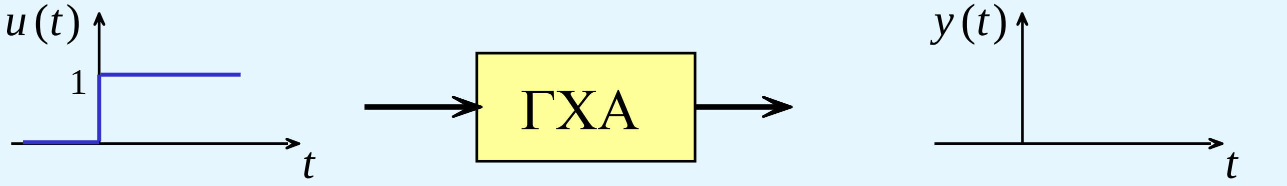
Για να πετύχουμε ανάλογη συμπεριφορά για το μέτρο, λογαριθμίζουμε την εξίσωση

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)| \qquad \log|Y(\omega)| = \log|H(\omega)| + \log|X(\omega)|$$

Χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα για τη συχνότητα, και ως μονάδα μέτρου το ***decibel*** (dB). Η κλίμακα των dB βασίζεται στην αντιστοιχία

$$dB = 20\log_{10}|H(\omega)|$$

- Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος πρώτης τάξεως όταν η είσοδος είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.



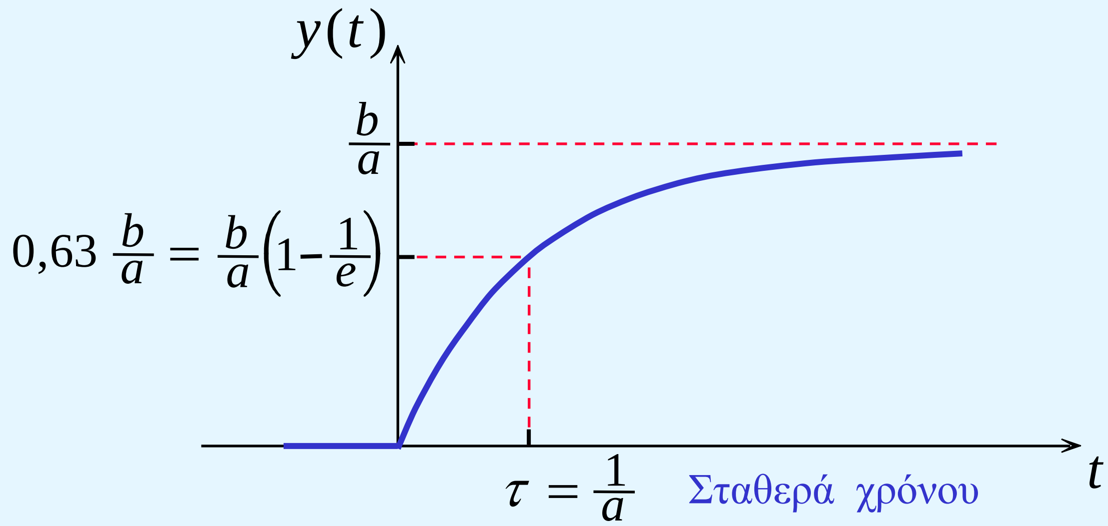
Το σύστημα πρώτης τάξης έχει κρουστική απόκριση $h(t) = be^{-at}u(t)$ και απόκριση συχνότητας $H(\omega) = \dfrac{b}{j\omega + a}$

Απάντηση

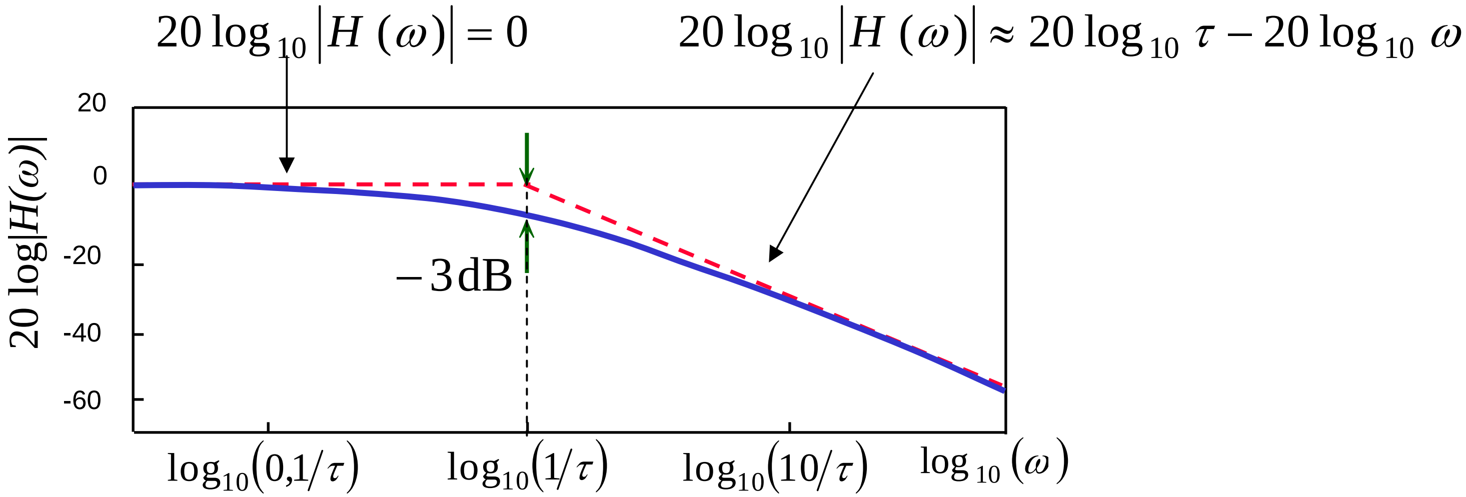
$$Y(\omega) = \frac{b}{a}\frac{1}{j\omega} - \frac{b}{a}\frac{1}{j\omega + a}$$

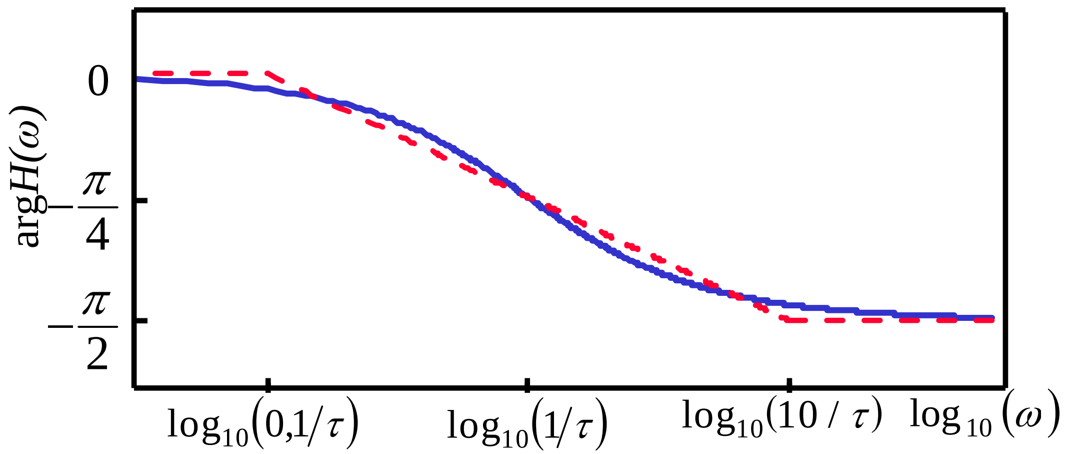
$$y(t) = \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at}\right)u(t)$$

$$y(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)u(t)$$



Τα διαγράμματα Bode συστήματος πρώτης τάξεως.

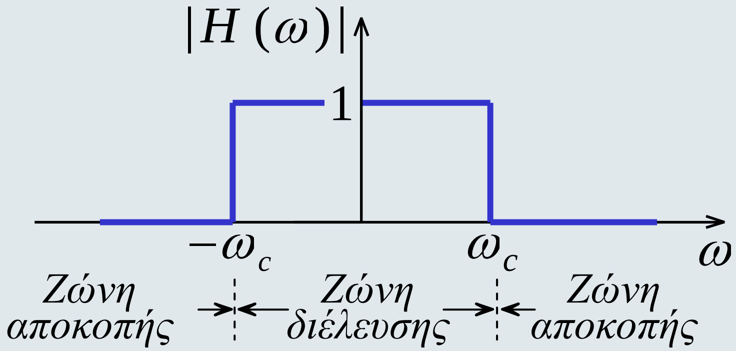


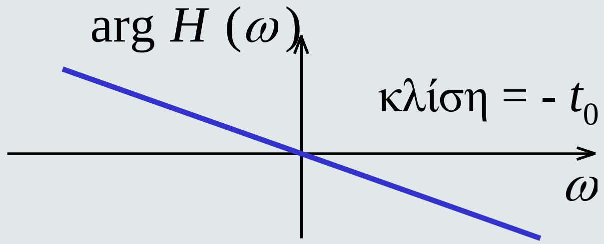


ΙΔΑΝΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ - ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

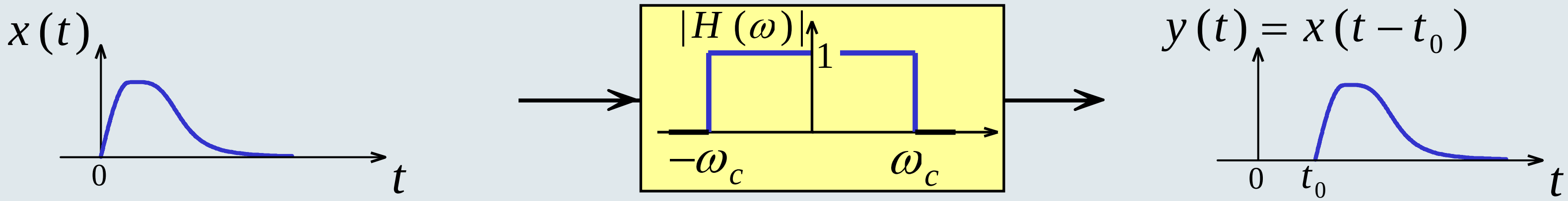
$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

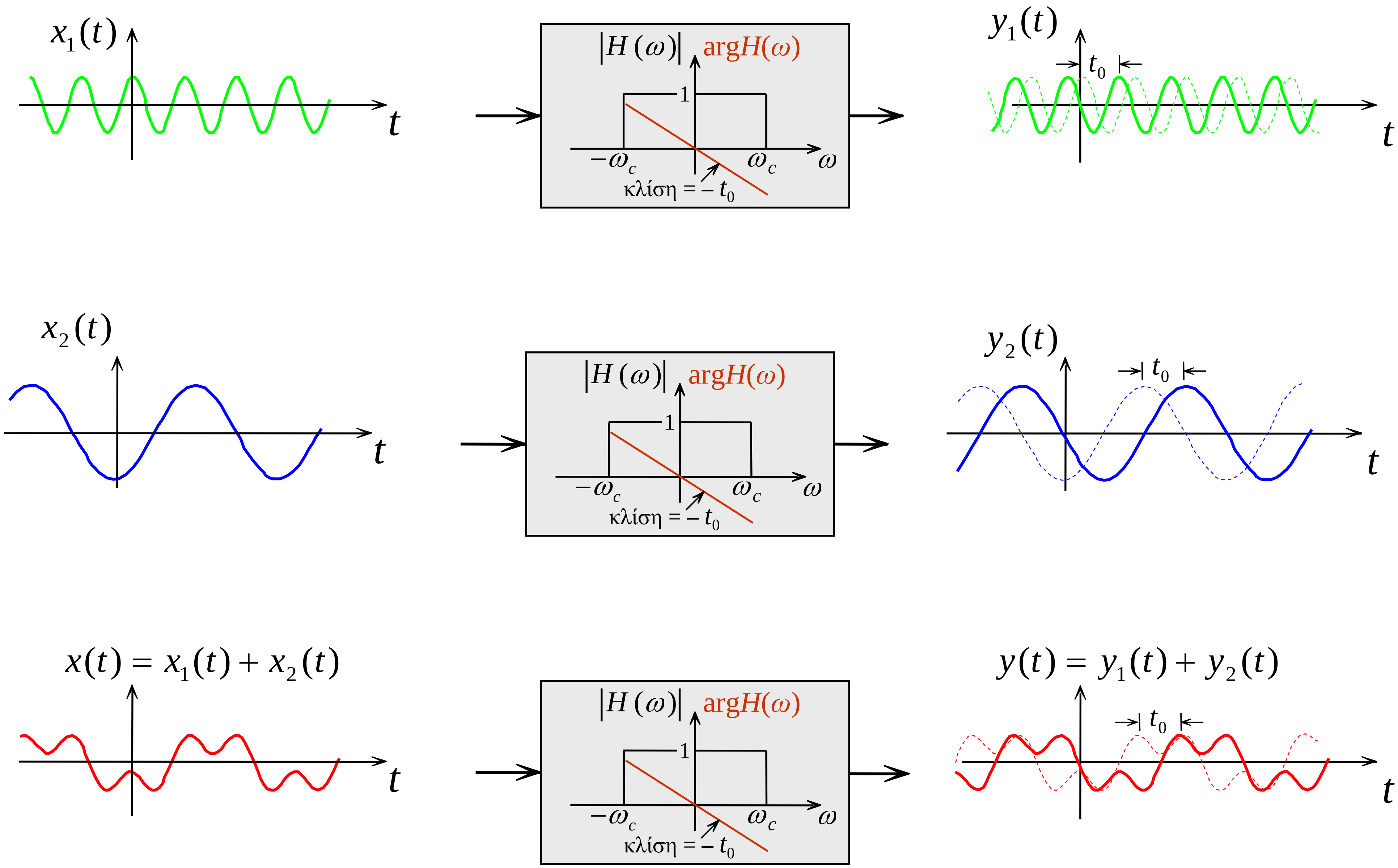
όπου ω_c είναι η ***συχνότητα αποκοπής***.



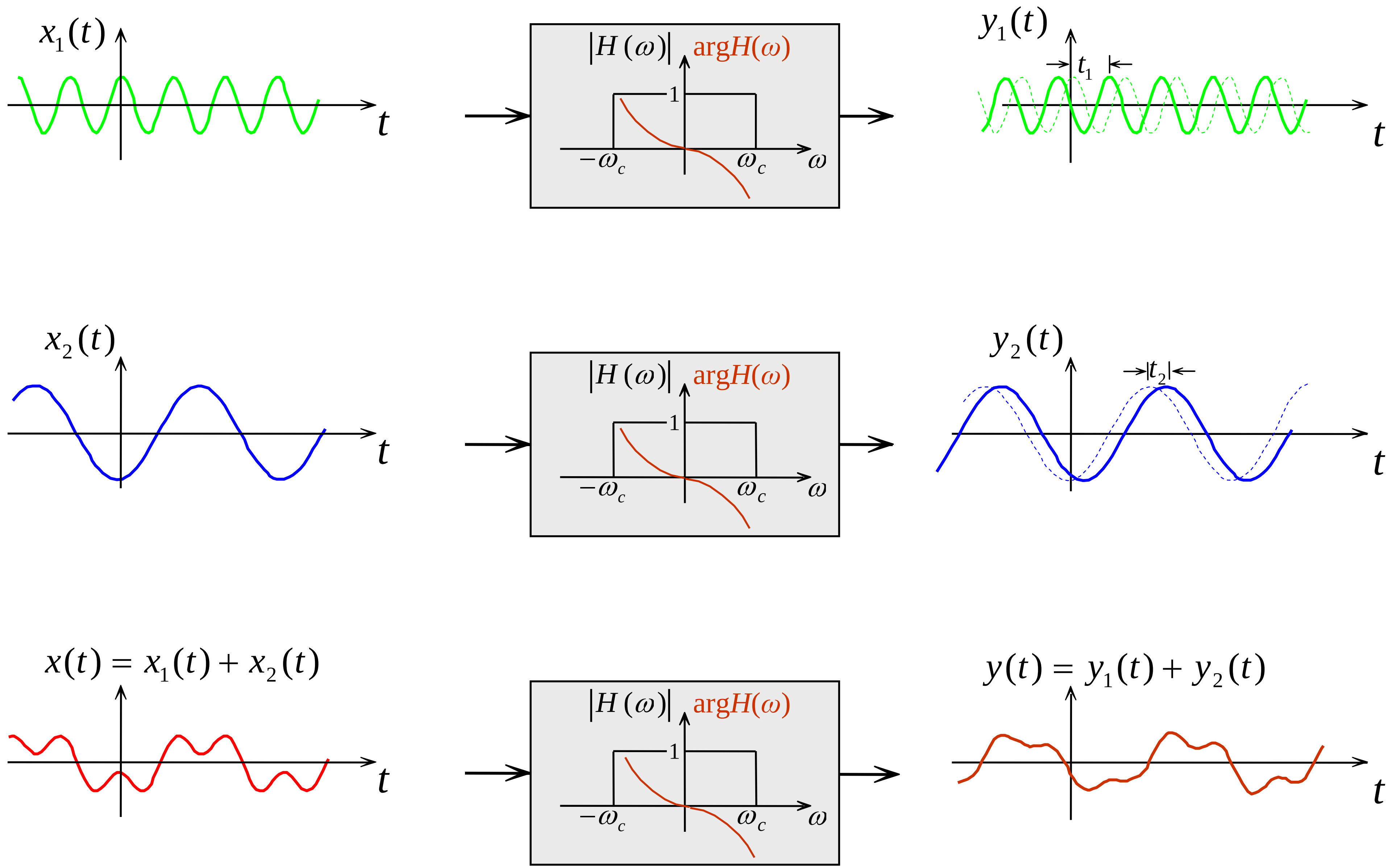


Η επίδραση του φίλτρου σε ένα σήμα εισόδου, με φασματικό περιεχόμενο εντοπισμένο στη ζώνη διέλευσης, είναι μια χρονική καθυστέρηση t_0.



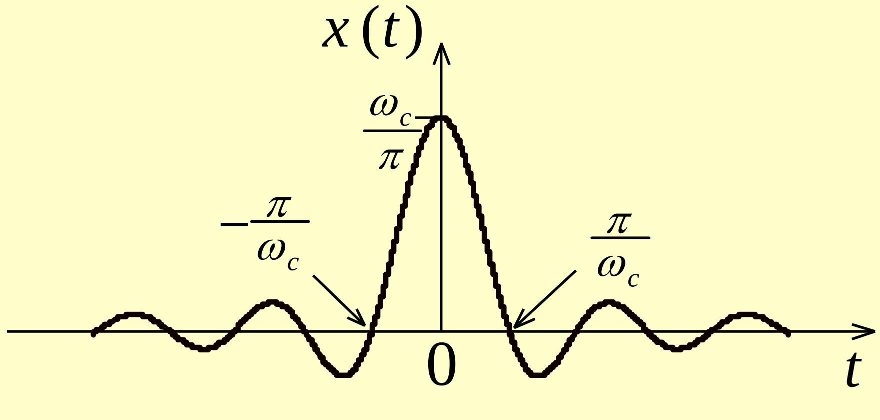


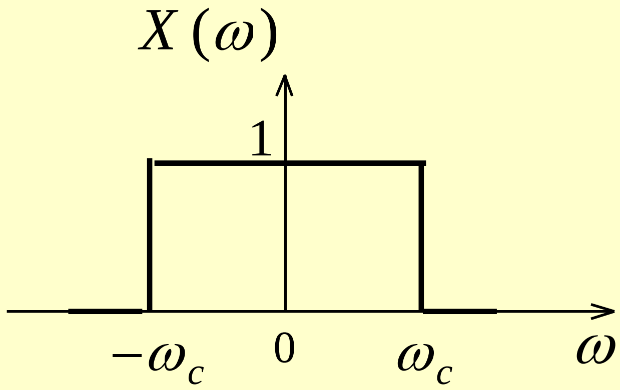
$x_1(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
κλίση = $-t_0$
$y_1(t)$
t_0
t
$x_2(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
κλίση = $-t_0$
$y_2(t)$
t_0
t
$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
t
$|H(\omega)|$
$\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω
κλίση = $-t_0$
$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
t_0
t



$x_1(t)$
t
$|H(\omega)|$ $\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$ ω_c ω
$y_1(t)$
t_1
t
$x_2(t)$
t
$|H(\omega)|$ $\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$ ω_c ω
$y_2(t)$
t_2
t
$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
t
$|H(\omega)|$ $\arg H(\omega)$
1
$-\omega_c$ ω_c ω
$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
t

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \qquad X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$





Ολίσθηση στο χρόνο για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 είναι

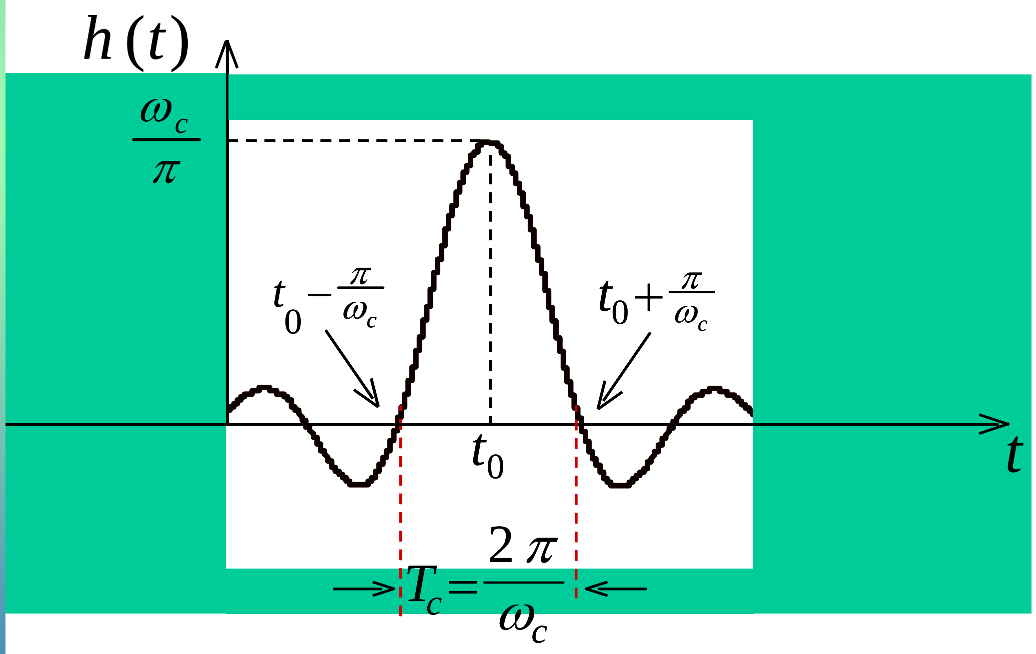
$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

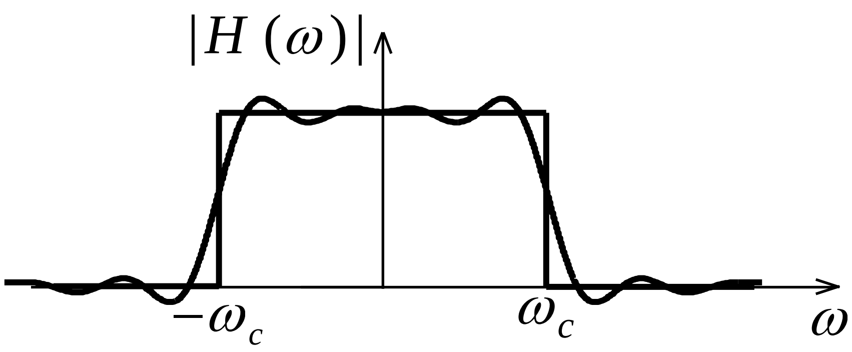
$$h(t) = \frac{\sin[\omega_c (t - t_0)]}{\pi (t - t_0)} \qquad H(\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_C}\right)$$

Το αποτέλεσμα της παραθύρωσης

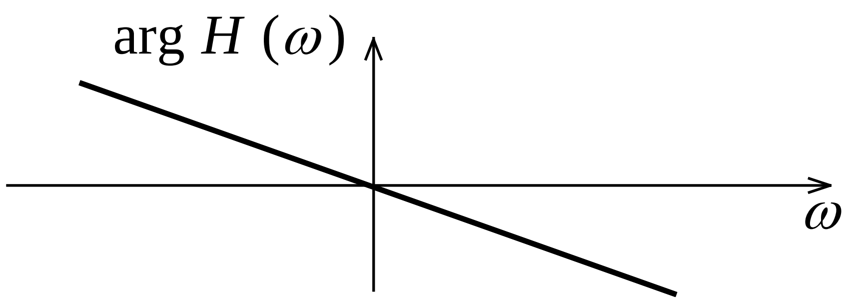
Η κρουστική απόκριση του ιδανικού κατωπερατού φιλτρού

$$h(t) = \frac{\sin\left[\omega_c (t - t_0)\right]}{\pi (t - t_0)} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_c (t - t_0)}{\pi}\right]$$

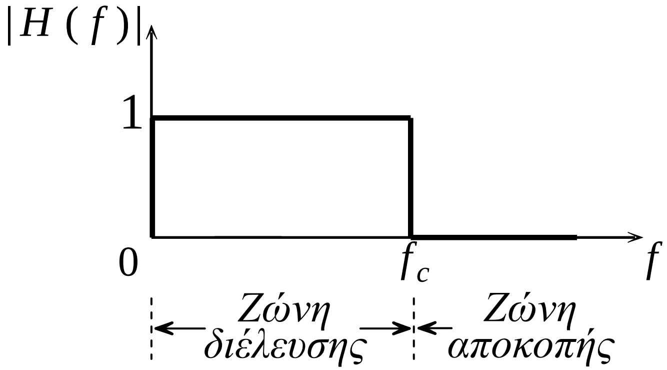




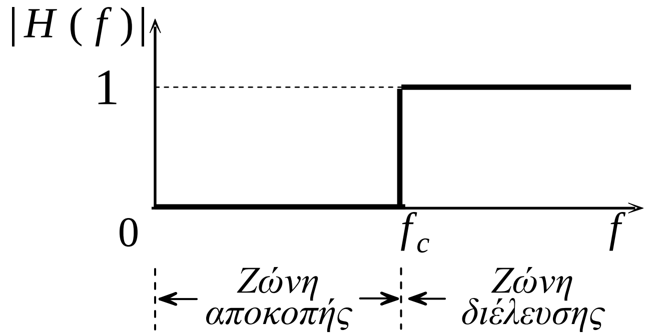
Το αποτέλεσμα της παραθύρωσης



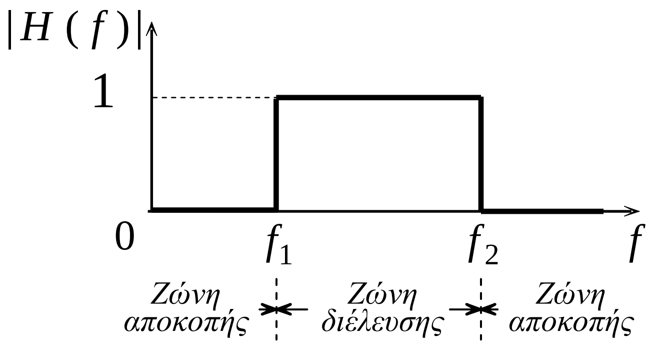
Ιδανικά φίλτρα



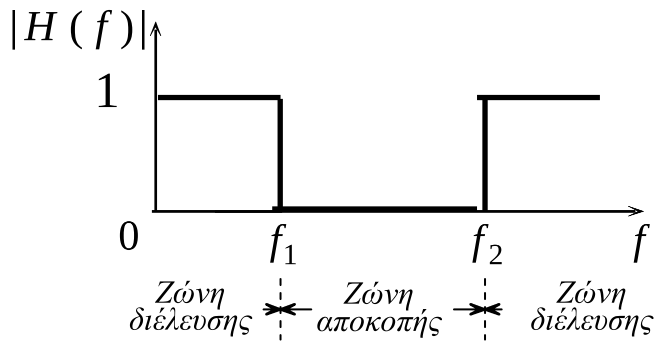
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο



Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο

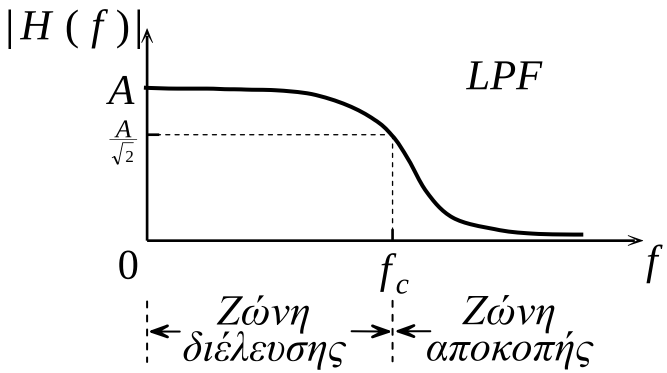


Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο

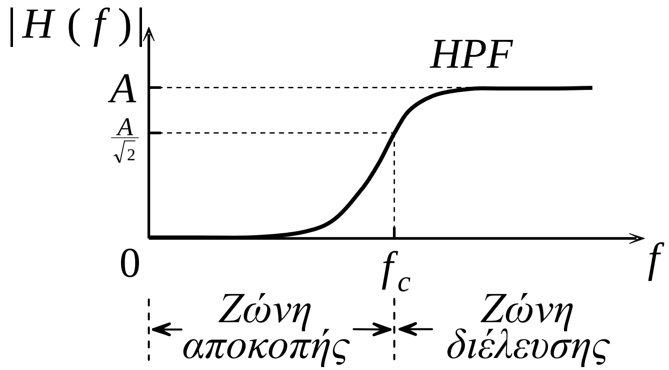


Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

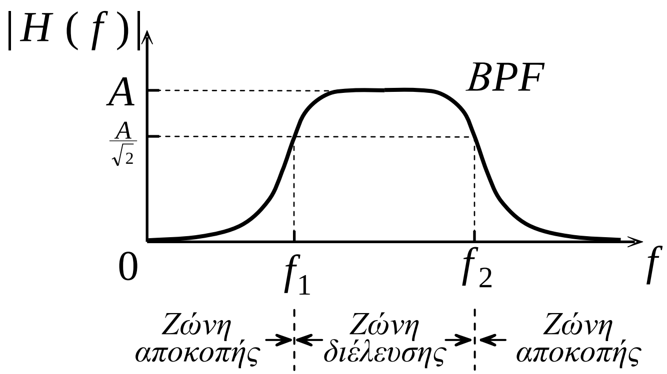
Πραγματικά φίλτρα



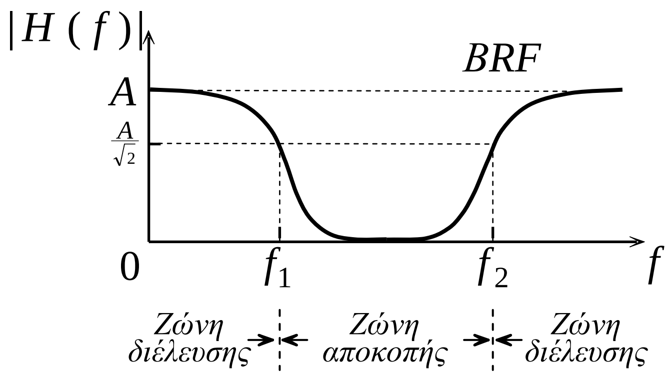
Πραγματικό βαθυπερατό φίλτρο



Πραγματικό υψιπερατό φίλτρο



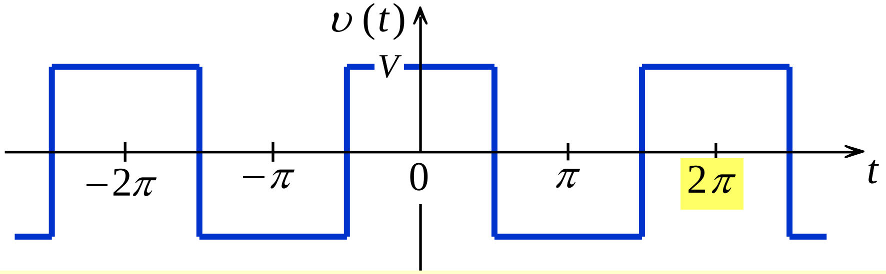
Πραγματικό ζωνοπερατό φίλτρο



Πραγματικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

Άσκηση

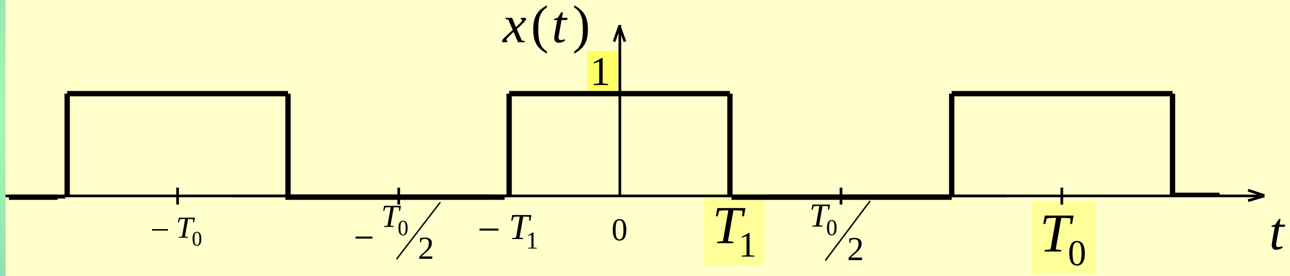
Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε τριγωνομετρική σειρά της τάσης $\upsilon(t)$



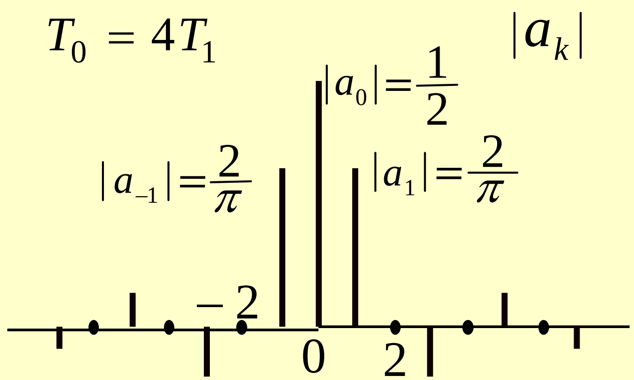
$$T_0 = 2\pi$$

$$T_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{T_0}{4}$$

Από το Παράδειγμα 3.6 έχουμε



$$T_0 = 4T_1$$



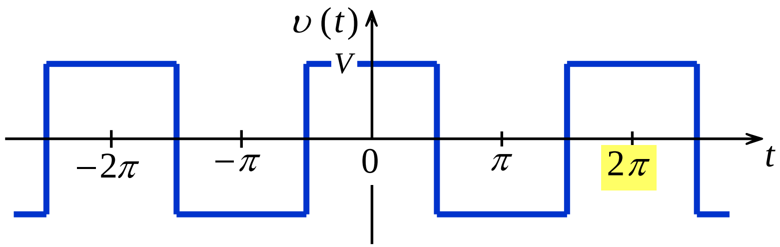
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) - \frac{2}{3\pi}\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{2}{5\pi}\cos\left(5\frac{2\pi}{T_0}t\right) - \dots$$

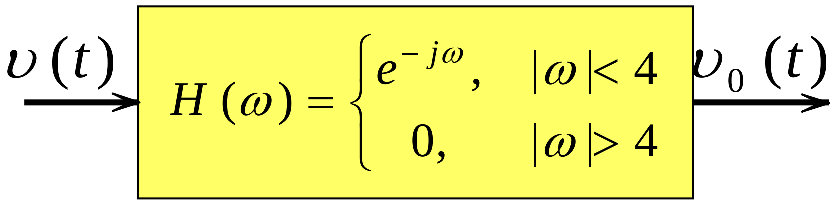
Παρατηρούμε ότι η τάση εισόδου $\upsilon(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της τάσης εισόδου είναι

$$\upsilon(t) = 2V\left[\frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5t) - \dots\right]$$

Άσκηση 4.5





Η τάση εισόδου $\upsilon(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

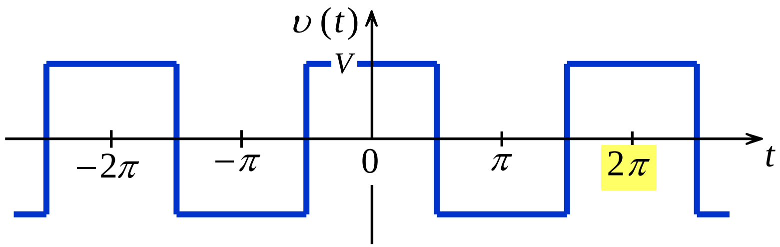
Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της τάσης εισόδου είναι

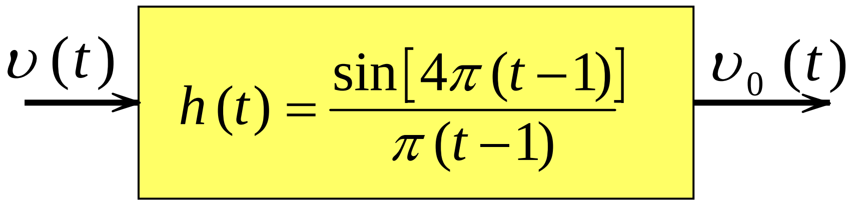
$$\upsilon(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t) + \cdots\right]$$

Επειδή η συχνότητα αποκοπής του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου είναι $\omega_c = 4$, από το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο διέρχονται μόνο οι δύο πρώτοι όροι, με χρονική καθυστέρηση $t_0 = 1$. Έτσι η έξοδος του φίλτρου είναι

$$\upsilon_o(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\cos(t-1) - \frac{1}{3}\cos 3(t-1)\right]$$

Άσκηση





Η τάση εισόδου $\upsilon(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

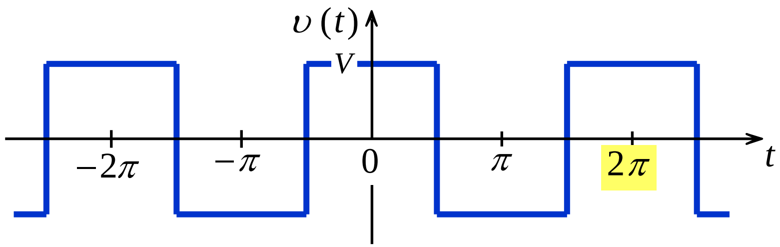
Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της τάσης εισόδου είναι

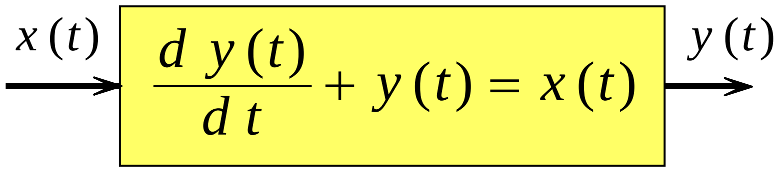
$$\upsilon(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t) + \cdots\right]$$

Επειδή η συχνότητα αποκοπής του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου είναι $\omega_c = 4$, από το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο διέρχονται μόνο οι δύο πρώτοι όροι, με χρονική καθυστέρηση $t_0 = 1$. Έτσι η έξοδος του φίλτρου είναι

$$\upsilon_o(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\cos(t-1) - \frac{1}{3}\cos 3(t-1)\right]$$

Άσκηση 4.6





Η τάση εισόδου $\upsilon(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της τάσης εισόδου είναι

$$\upsilon(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t) + \cdots\right]$$

Στο Παράδειγμα 4.1 έχουμε υπολογίσει την απόκριση συχνότητας του συστήματος πρώτης τάξης

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = |H(\omega_0)| A\cos[\omega_0 t + \arg H(\omega_0)]$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι η αρμονική συνιστώσα

$$\upsilon_1(t) = (4V/\pi)\cos(t)$$

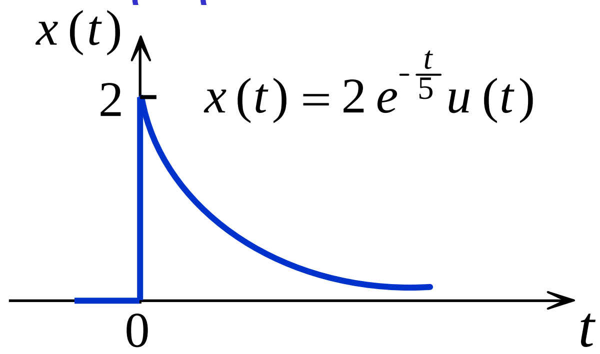
τότε η έξοδος του συστήματος είναι

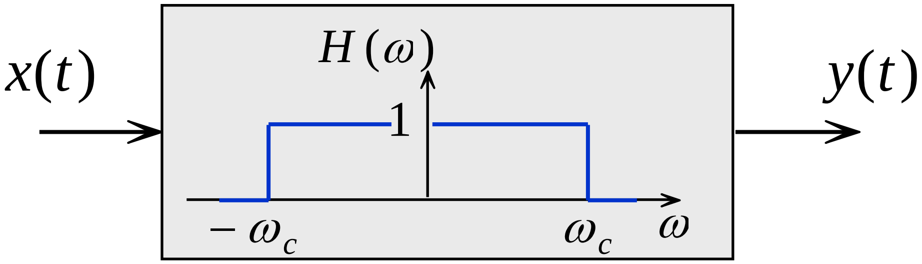
$$y_1(t) = |H(1)| \frac{4V}{\pi}\cos\left[t + \arg H(1)\right] = \frac{4V}{\sqrt{2}\pi}\cos\left[t - \frac{\pi}{4}\right]$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε την απόκριση $y_n(t)$ για κάθε αρμονική συνιστώσα $\upsilon_n(t)$, n = 2, 3, … του σήματος εισόδου $\upsilon(t)$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος

$$y(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3\sqrt{10}}\cos\left[3t - \tan^{-1}(3)\right] + \cdots\right]$$

Άσκηση 4.7





Ο ΜF του σήματος εισόδου και το μέτρο του μετασχηματισμού είναι

$$X(\omega) = \frac{2}{0{,}2 + j\omega} \qquad \text{και} \qquad \left|X(\omega)\right|^2 = \frac{4}{0{,}2^2 + \omega^2}$$

Η ολική ενέργεια του σήματος εισόδου είναι

$$E_{εισ} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{0}^{\infty} 4\, e^{-\frac{2t}{5}} dt = -10\, e^{-\frac{2t}{5}}\Big|_0^{\infty} = 10$$

Η ενέργεια του σήματος εισόδου μπορεί να υπολογιστεί και στο πεδίο των συχνοτήτων

$$E_{εισ} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{0{,}2^2 + \omega^2}\, d\omega = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{4}{0{,}2^2 + \omega^2}\, d\omega = \frac{4}{\pi}\left[5 \tan^{-1}(5\omega)\right]\Big|_0^{\infty} = \frac{4}{\pi}\, 5\, \frac{\pi}{2} = 10$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου είναι

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2}{0,2 + j\omega}, & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θεώρημα του Parseval

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 d f$$

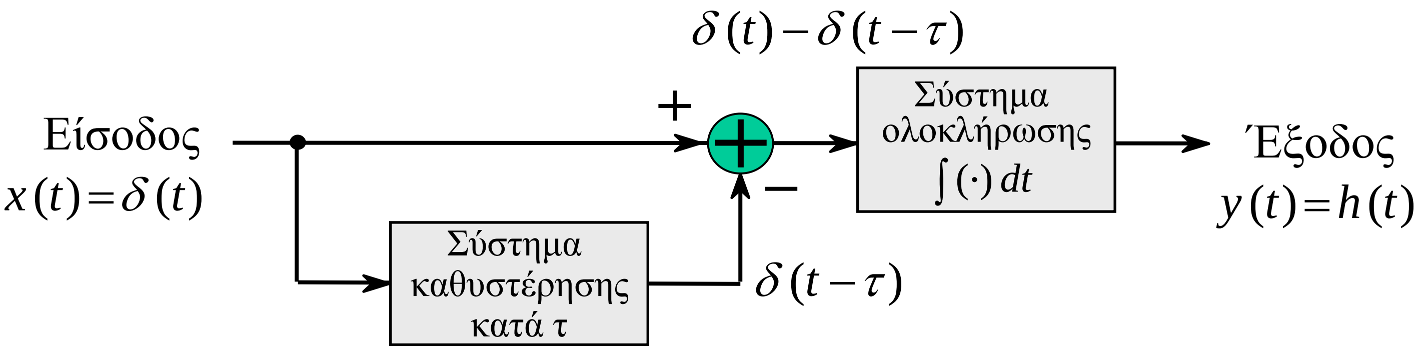
Η ολική ενέργεια του σήματος εξόδου είναι

$$E_{\text{εξόδ.}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_C}^{\omega_C} \frac{4}{0,2^2+\omega^2} d\omega = \int_0^{\omega_C} \frac{4}{0,2^2+\omega^2} d\omega = \frac{4}{\pi}\left[5\tan^{-1}(5\omega)\right]\Big|_0^{\omega_C} = \frac{4}{\pi} 5\tan^{-1}(5\omega_C)$$

Επειδή η ενέργεια του σήματος εξόδου πρέπει να είναι ίση με τη μισή της ενέργειας του σήματος εισόδου, έχουμε την εξίσωση

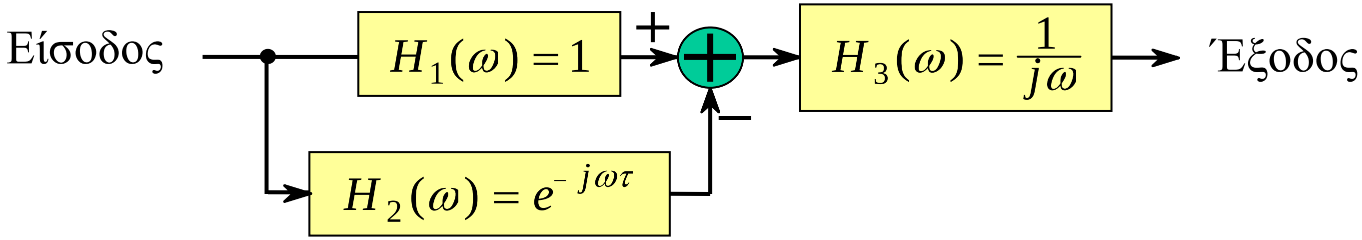
$$\frac{4}{\pi} 5\tan^{-1}(5\omega_c) = 5 \quad \text{απ' όπου προκύπτει} \quad \omega_c = 0,2 \,\text{rad}/\text{sec}$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας του συστήματος.



Περιγραφή του συστήματος στο πεδίο του χρόνου.

$$y(t)=h(t)=\int_{-\infty}^{t}(\delta(\xi)-\delta(\xi-\tau))\,d\xi=u(t)-u(t-\tau)=\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$$



Περιγραφή του συστήματος στο πεδίο συχνότητας.

$$H_{\text{ολική}}(\omega)=\frac{1-e^{-j\omega\tau}}{j\omega}=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)}{2j}=\frac{2}{\omega}\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}=\tau\,\frac{\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

Άσκηση

Γραμμικό χρονικά αναλλοιώτο σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-bt}u(t)$ Όταν το σήμα εισόδου είναι $x(t) = e^{-at}u(t)$ να βρεθούν

α) η φασματική πυκνότητα ενέργειας

β) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και

γ) η ενέργεια του σήματος εξόδου.

Απάντηση

α) Η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος εξόδου είναι

$$|Y(\omega)|^2 = \frac{1}{b^2 - a^2}\left(\frac{1}{a^2+\omega^2} - \frac{1}{b^2+\omega^2}\right)$$

β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος εξόδου είναι

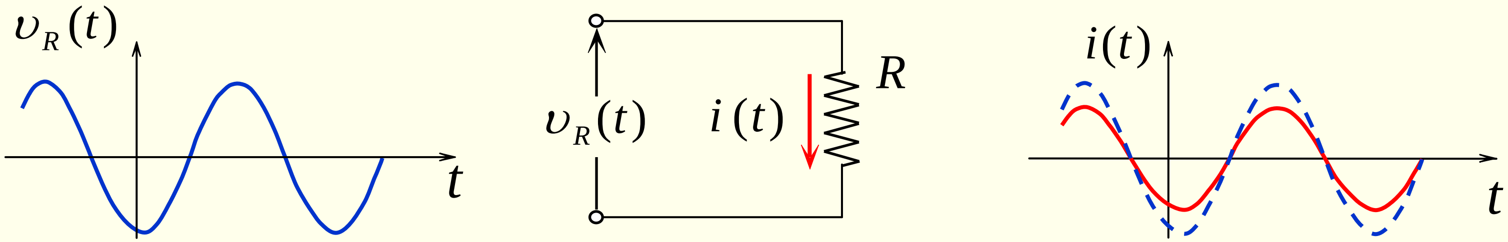
$$R_y(\tau) = F^{-1}\left\{|Y(\omega)|^2\right\} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|} - \frac{1}{2b}e^{-b|\tau|}\right)$$

γ) Η ενέργεια του σήματος εξόδου είναι

$$E_y = R_y(\tau)\big|_{\tau=0} = \frac{1}{2ab(a+b)}$$

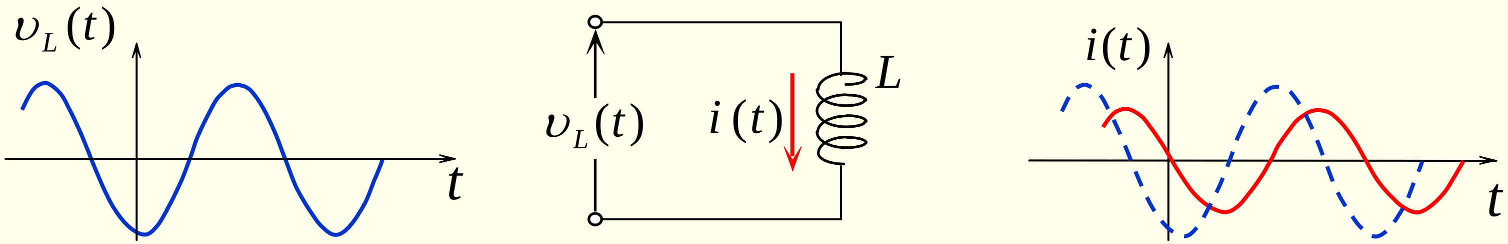
Υπενθυμίζονται οι γνωστές σχέσεις από τη θεωρία κυκλωμάτων κατά τις οποίες

α) Το ωμικό στοιχείο εμφανίζει **αντίσταση *R*** και η ένταση ρεύματος που τη διαρρέει βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την τάση στα άκρα της.



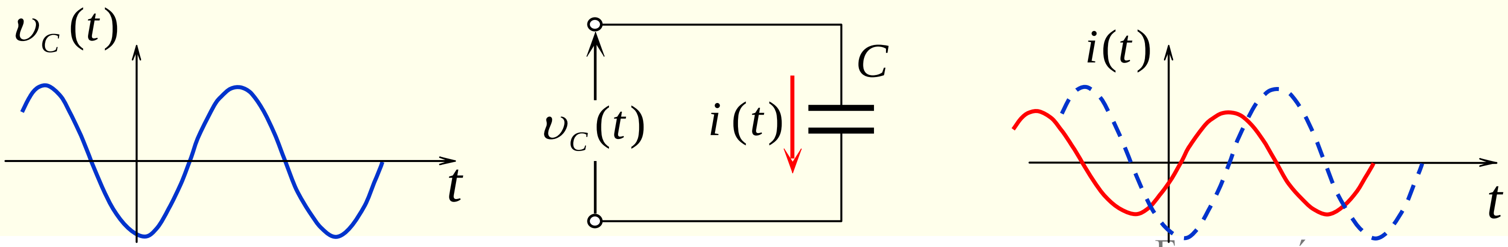
$$i(t) = \frac{\upsilon_R(t)}{R}$$

β) Το πηνίο εμφανίζει **επαγωγική αντίσταση *Lω*** και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει βρίσκεται σε διαφορά φάσης π/2 με την τάση στα άκρα του $\boldsymbol{Z_L = jL\omega}$.



$$i(t) = \frac{\upsilon_L(t)}{Z_L}$$

γ) Ο πυκνωτής εμφανίζει **χωρητική αντίσταση 1/*Cω*** και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει βρίσκεται σε διαφορά φάσης – π/2 με την τάση στα άκρα του $\boldsymbol{Z_C = 1/ jC\omega}$.

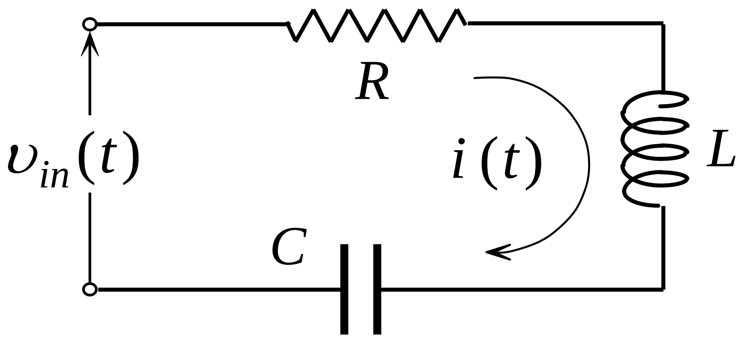


$$i(t) = \frac{\upsilon_C(t)}{Z_C}$$

δ) Η **επαγωγική αντίσταση κυκλώματος** είναι $Z(\omega) = U(\omega) \,/\, I(\omega)$.

Άσκηση

Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος RLC σε σειρά



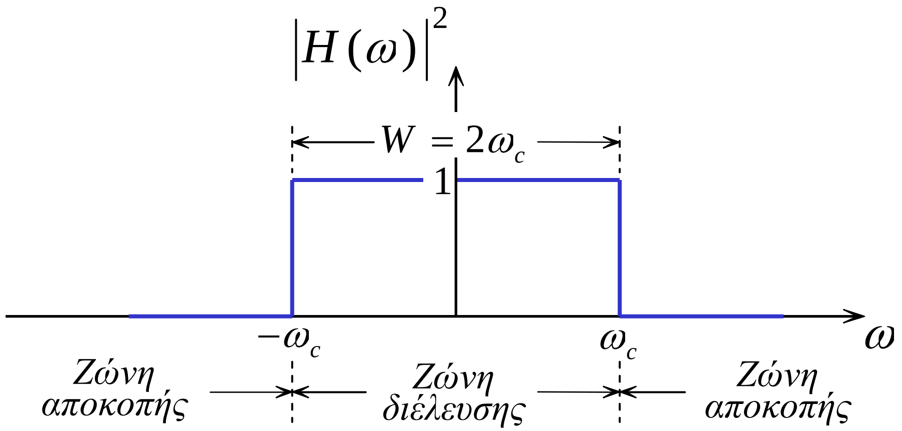
$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{U_{in}(\omega)}$$

$$= \frac{j\omega}{L(j\omega)^2 + R(j\omega) + \frac{1}{C}}$$

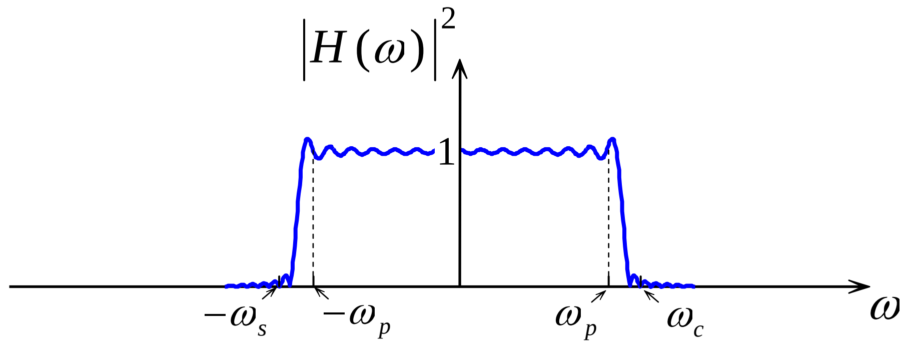
$$= \frac{j\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = R + \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

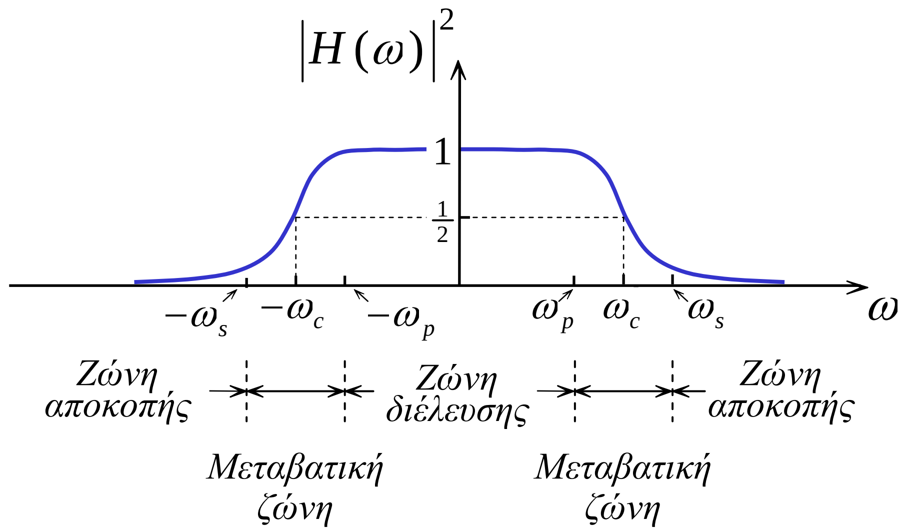
$$Z(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2$$



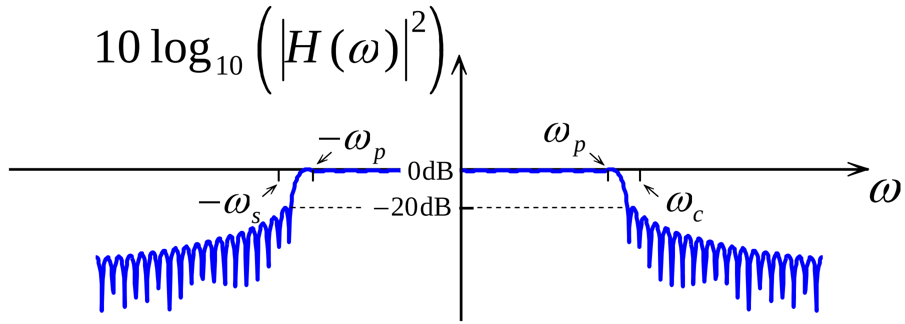
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με εύρος-ζώνης $W = 2\omega_c$



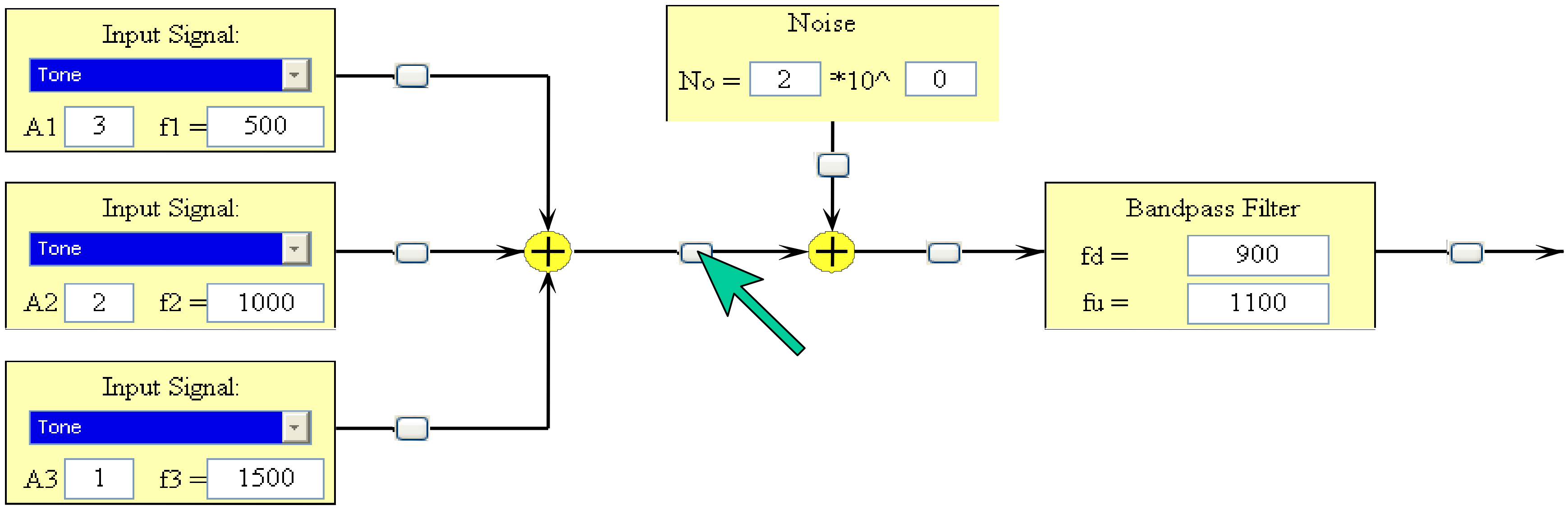
Η γραφική παράσταση της απόκρισης ισχύος σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.

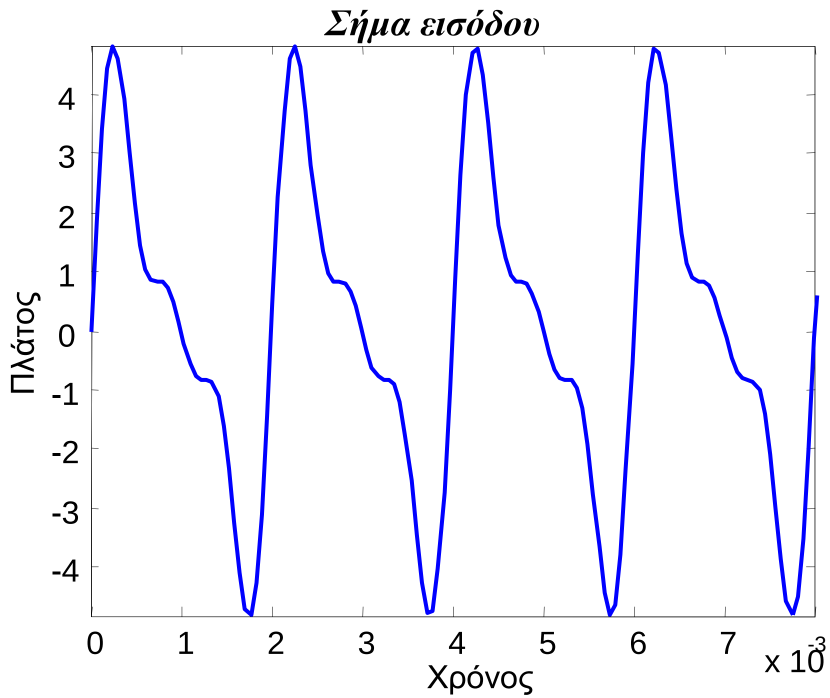


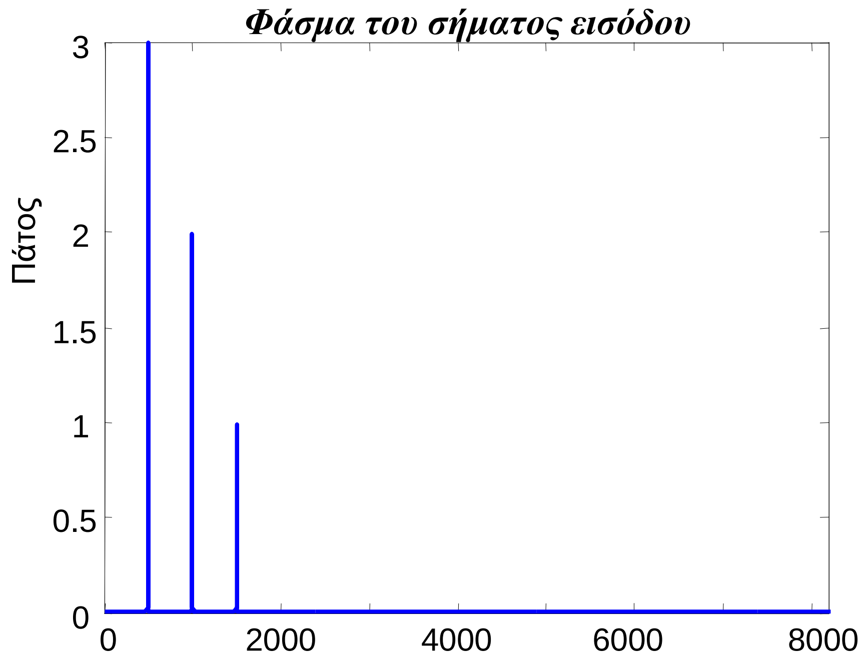
Πραγματικό βαθυπερατό φίλτρο

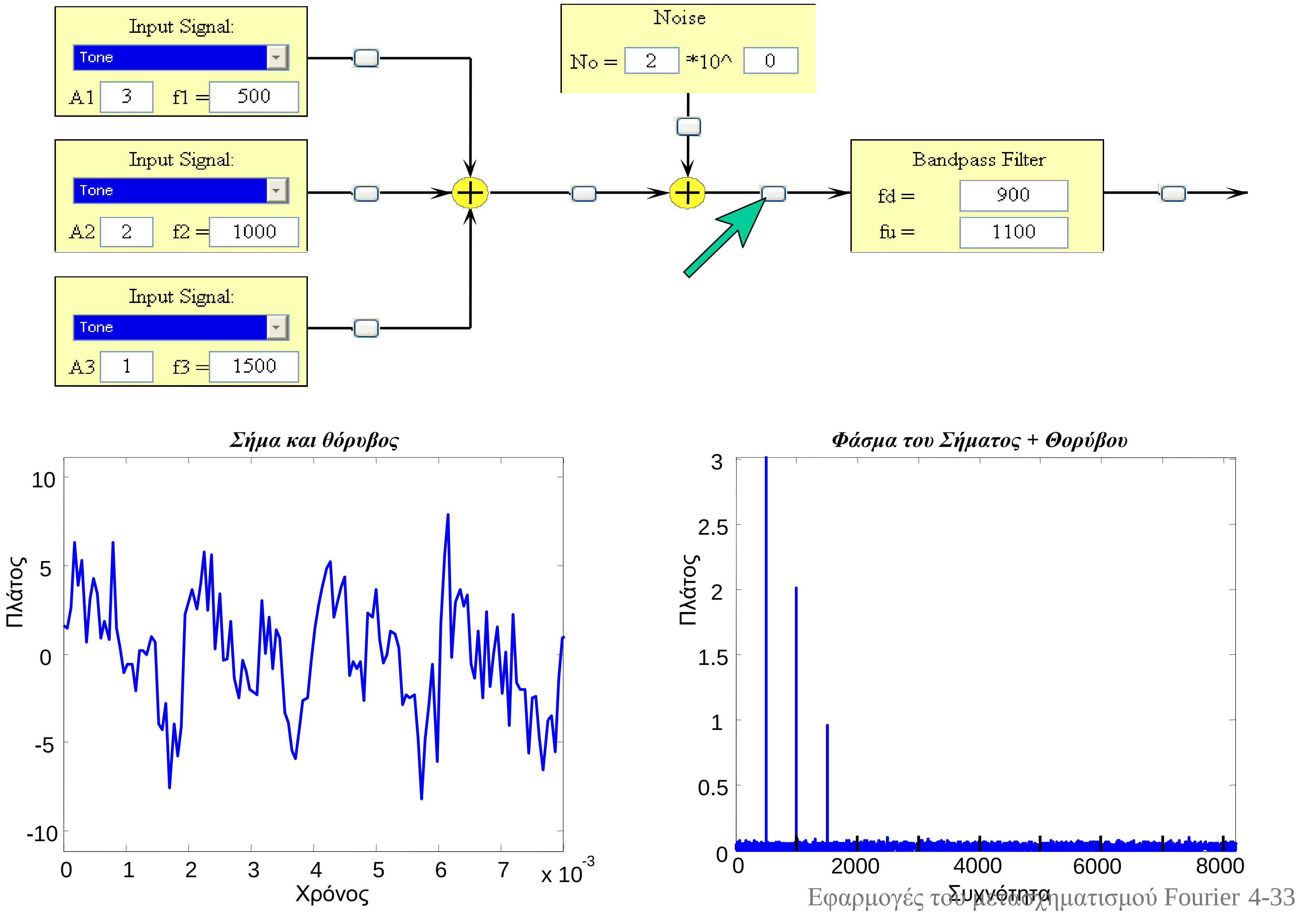


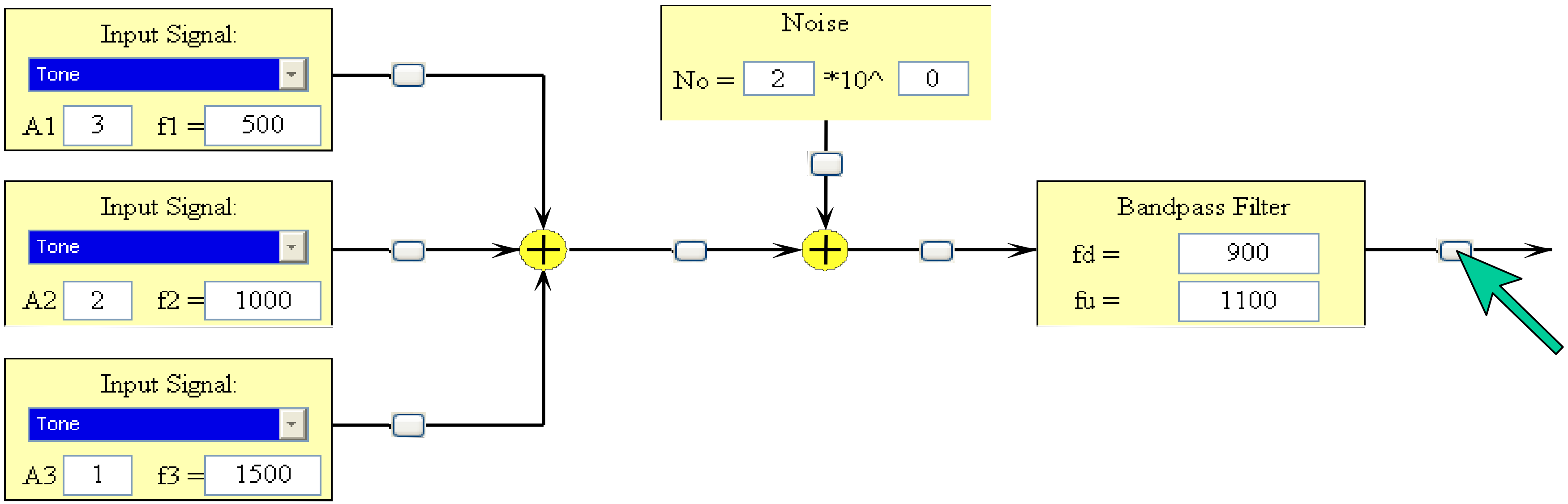
Η γραφική παράσταση της απόκρισης ισχύος σε dB *σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.*


Input Signal:
Tone
A1 3 f1 = 500
Input Signal:
Tone
A2 2 f2 = 1000
Input Signal:
Tone
A3 1 f3 = 1500
Noise
No = 2 *10^ 0
Bandpass Filter
fd = 900
fu = 1100

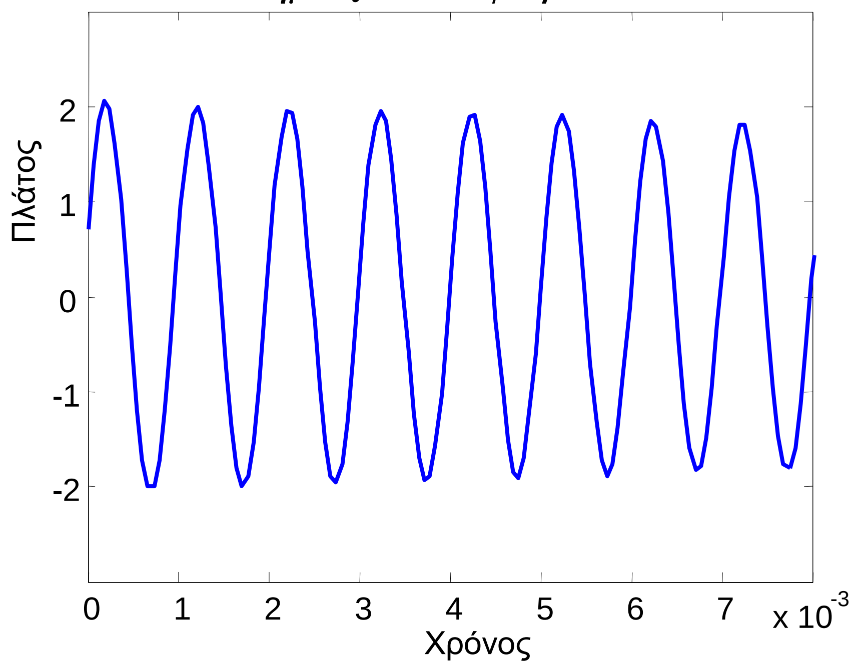

Σήμα εισόδου
Πλάτος
Χρόνος
x 10^-3


Φάσμα του σήματος εισόδου
Πάτος
Συχνότητα

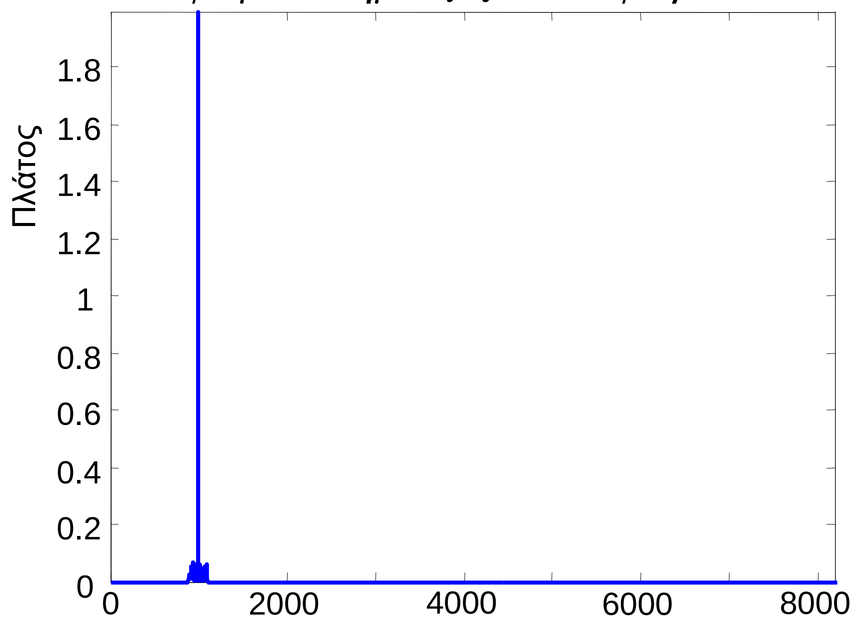

Input Signal:
Tone
A1 3 f1 = 500
Input Signal:
Tone
A2 2 f2 = 1000
Input Signal:
Tone
A3 1 f3 = 1500
Noise
No = 2 *10^ 0
Bandpass Filter
fd = 900
fu = 1100
Σήμα και θόρυβος
Πλάτος
Χρόνος
x 10^-3
Φάσμα του Σήματος + Θορύβου
Πλάτος
Συχνότητα

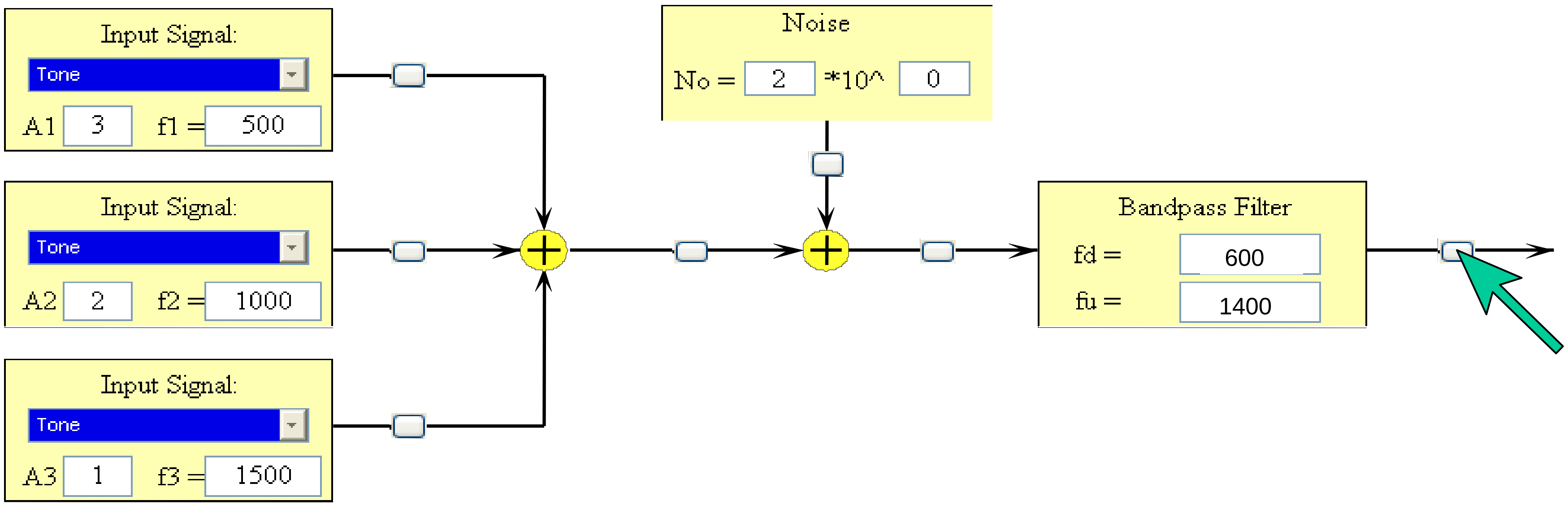


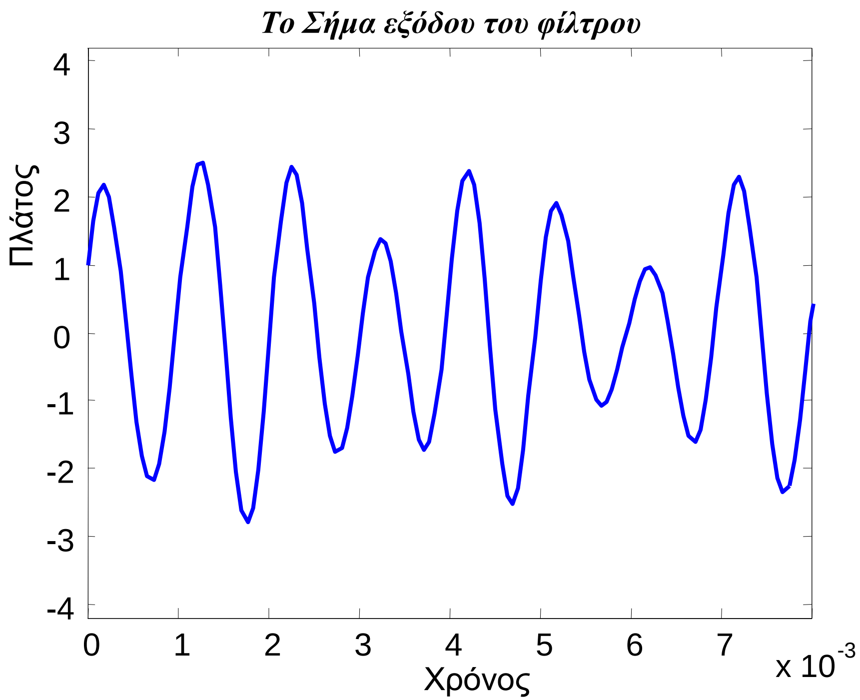
Το Σήμα εξόδου του φίλτρου

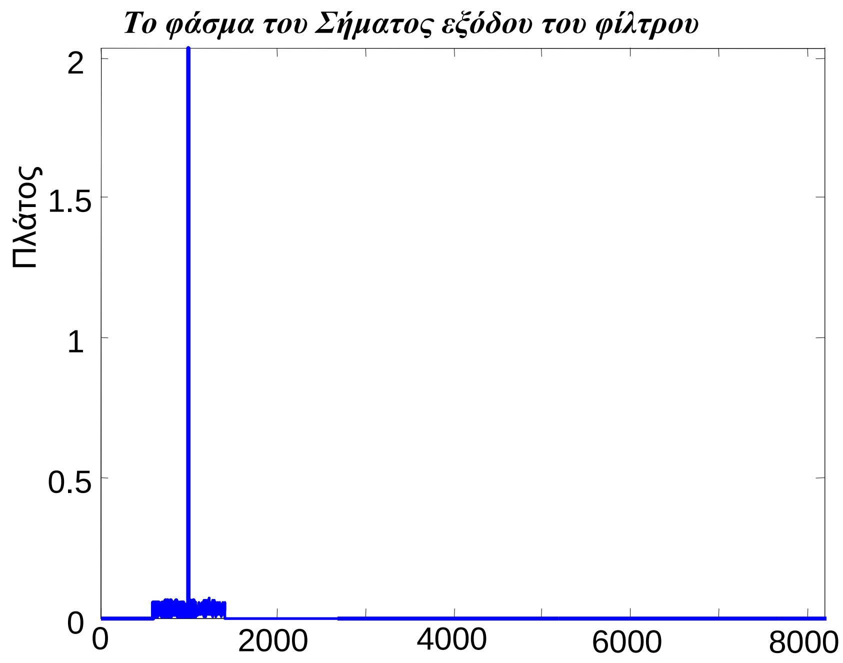


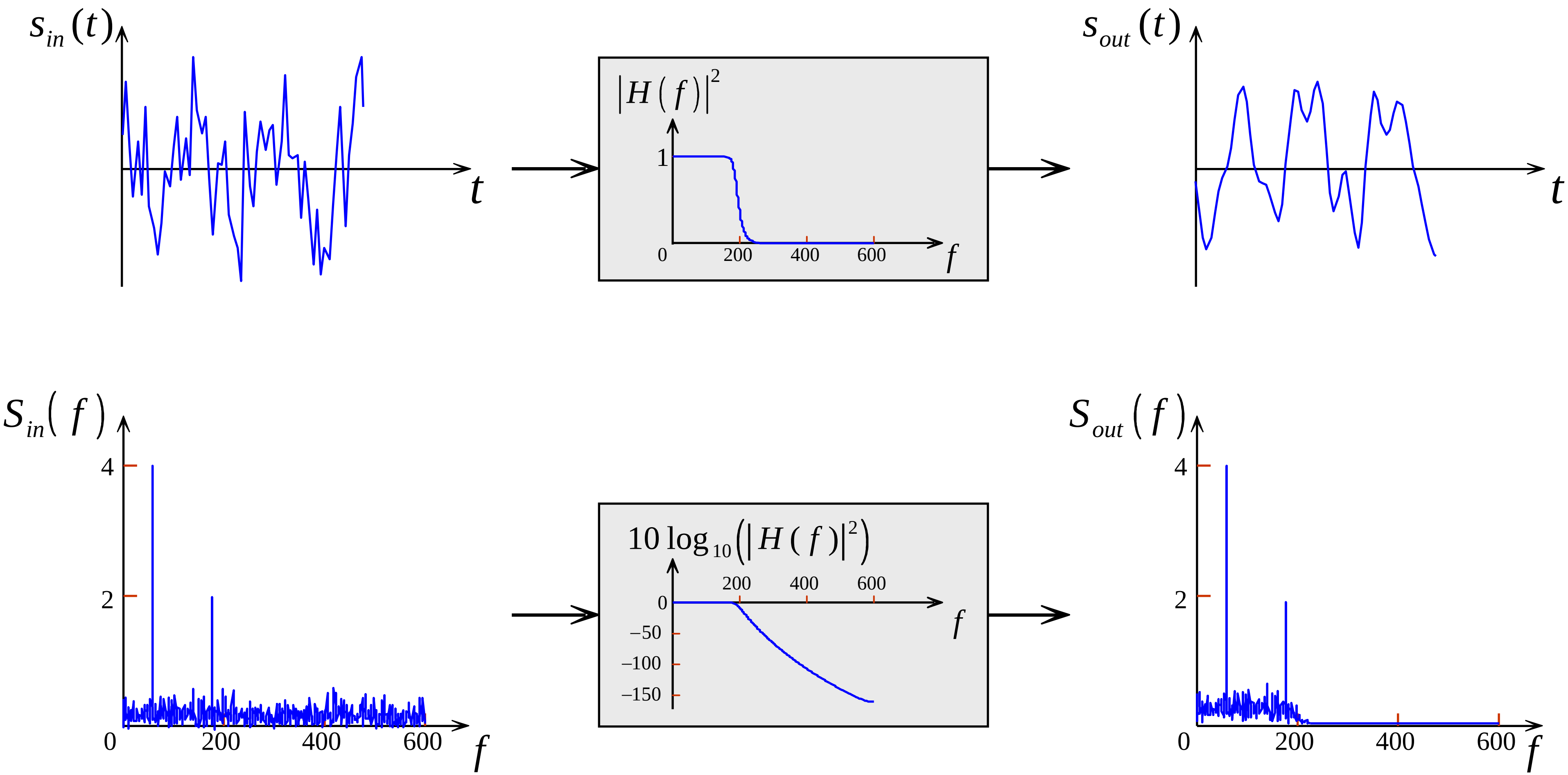
Το φάσμα του Σήματος εξόδου του φίλτρου

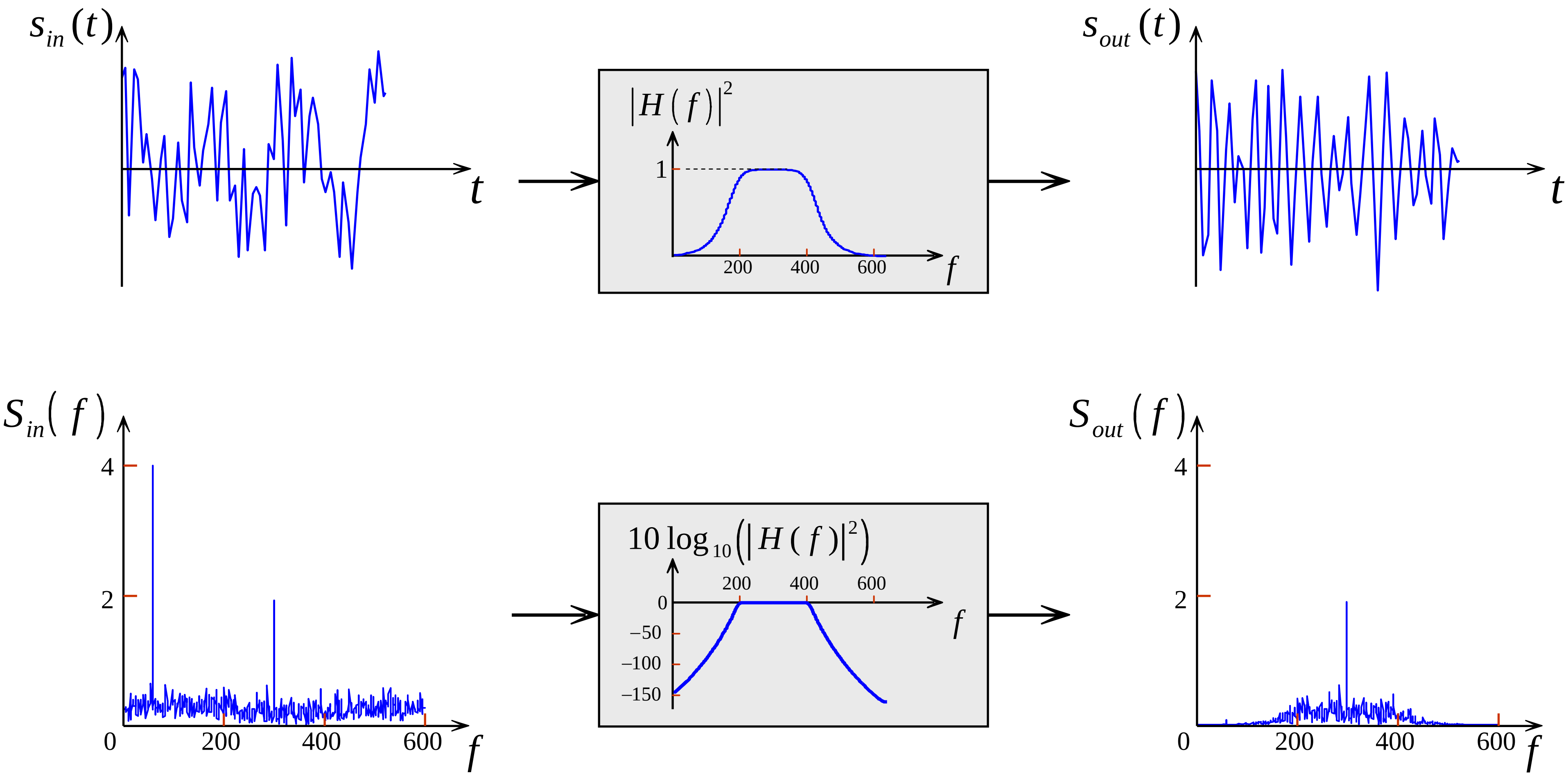


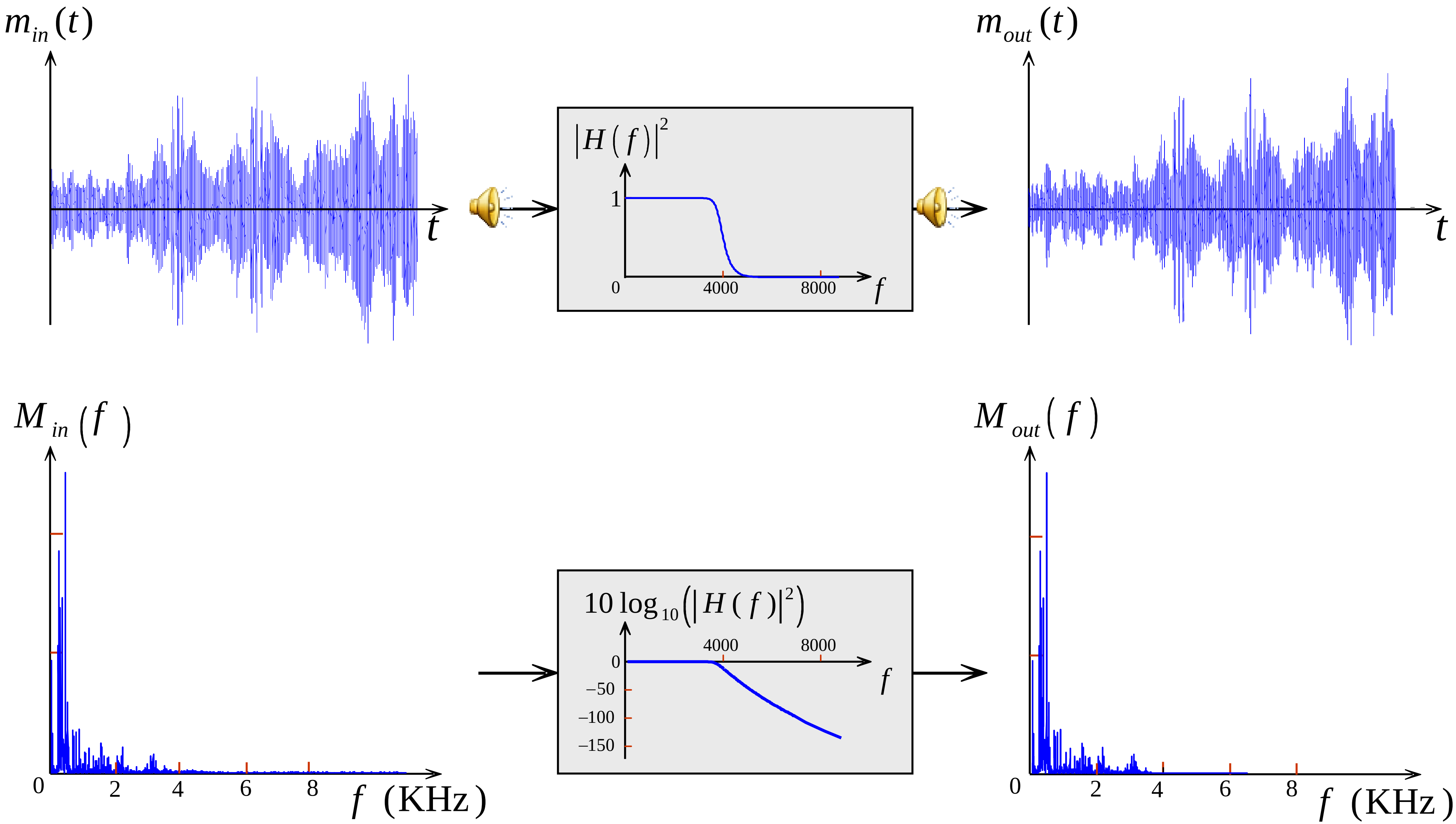

Input Signal:
Tone
A1 3 f1 = 500
Input Signal:
Tone
A2 2 f2 = 1000
Input Signal:
Tone
A3 1 f3 = 1500
Noise
No = 2 *10^ 0
Bandpass Filter
fd = 600
fu = 1400

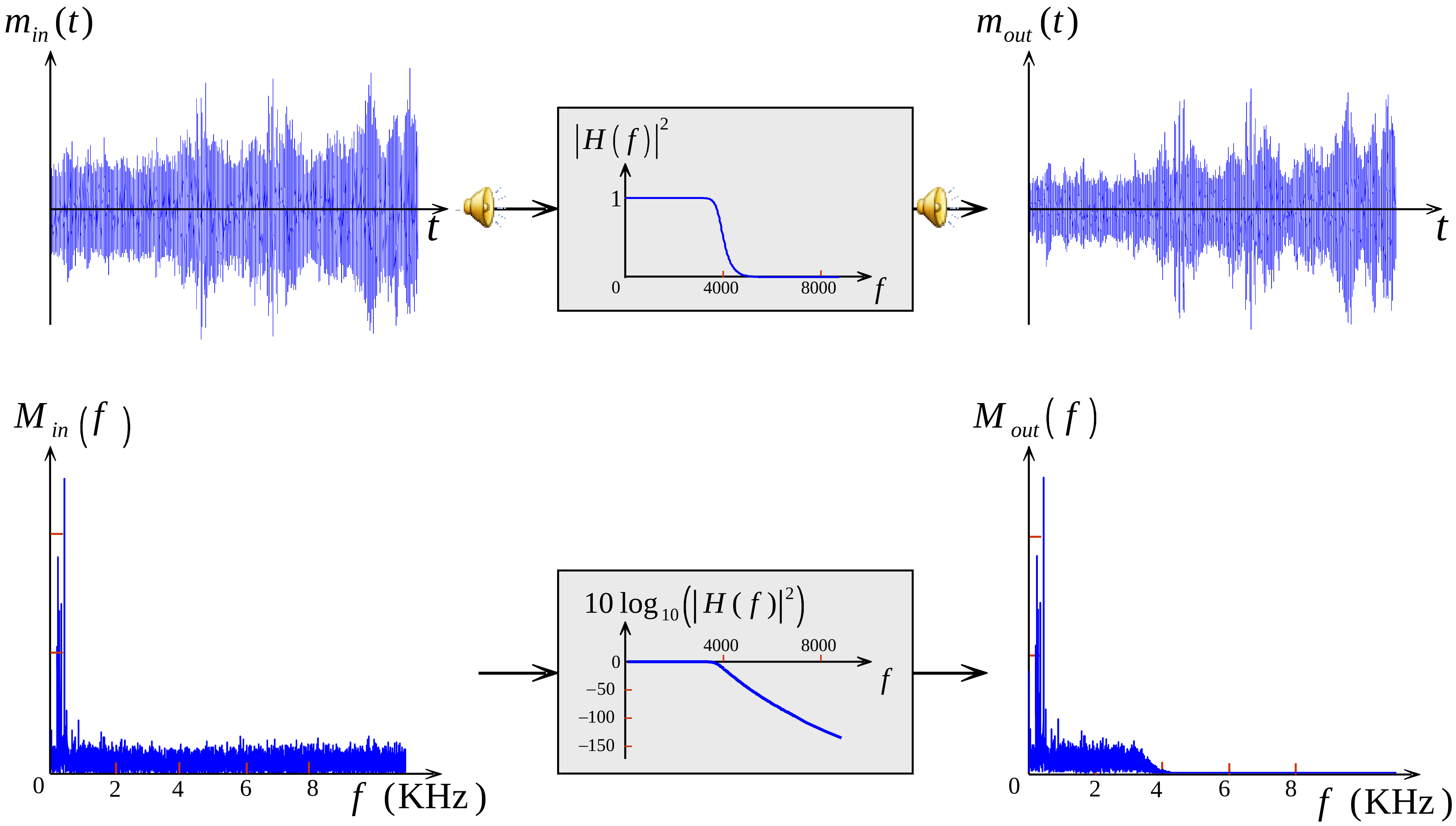

Το Σήμα εξόδου του φίλτρου
Πλάτος
Χρόνος
x 10^-3


Το φάσμα του Σήματος εξόδου του φίλτρου
Πλάτος
Συχνότητα

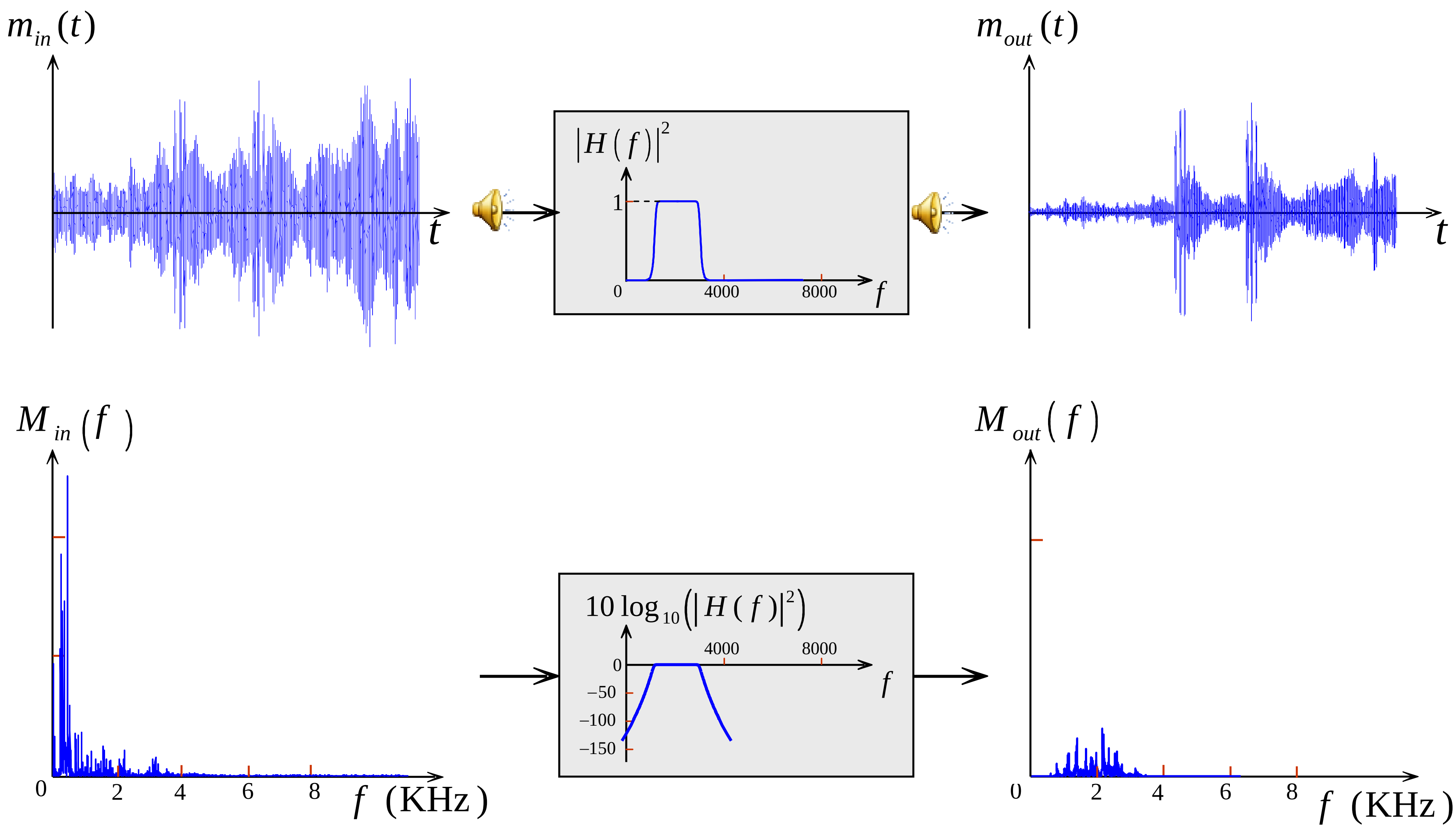

$s_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
200
400
600
f
$s_{out}(t)$
t
$S_{in}(f)$
4
2
0
200
400
600
f
$10\log_{10}(|H(f)|^2)$
200
400
600
0
−50
−100
−150
f
$S_{out}(f)$
4
2
0
200
400
600
f


$s_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
200
400
600
f
$s_{out}(t)$
t
$S_{in}(f)$
4
2
0
200
400
600
f
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
200
400
600
0
−50
−100
−150
f
$S_{out}(f)$
4
2
0
200
400
600
f


$m_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
4000
8000
f
$m_{out}(t)$
t
$M_{in}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)
$10\log_{10}(|H(f)|^2)$
4000
8000
0
−50
−100
−150
f
$M_{out}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)



$m_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
4000
8000
f
$m_{out}(t)$
t
$M_{in}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)
$10\log_{10}(|H(f)|^2)$
4000
8000
0
−50
−100
−150
f
$M_{out}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)



$m_{in}(t)$
t
$|H(f)|^2$
1
0
4000
8000
f
$m_{out}(t)$
t
$M_{in}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)
$10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$
0
−50
−100
−150
4000
8000
f
$M_{out}(f)$
0
2
4
6
8
f (KHz)