3. ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

- Περιγράψουμε τον τρόπο ***ανάπτυξης σε σειρά Fourier*** ενός περιοδικού αναλογικού σήματος.

- Ορίσουμε ***το μετασχηματισμό Fourier*** ενός μη περιοδικού αναλογικού σήματος, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

- Δώσουμε τη ***φυσική σημασία*** του αναπτύγματος σε σειρά Fourier και του μετασχηματισμού Fourier.

- Εφαρμόσουμε το παραπάνω ανάπτυγμα/μετασχηματισμό στις περιπτώσεις **α**) του περιοδικού τετραγωνικού σήματος, **β**) του τετραγωνικού παλμού και **γ**) του αιτιατού εκθετικού σήματος.

- Θα αναφέρουμε ***τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier***.

- Υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων.

- Επεκτείνουμε τις έννοιες της ***ενέργειας*** και της ***ισχύος*** τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο των συχνοτήτων.

Στο χώρο των n-διαστάσεων κάθε διάνυσμα παριστάνεται ως

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{e_i}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n(t)$$

Το ***εσωτερικό γινόμενο*** δύο διανυσμάτων ορίζεται από τη σχέση

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)\, y^*(t)\, dt$$

Για μια ορθοκανονική βάση διανυσμάτων οι συντεταγμένες (α_1, α_2, …, α_n), ενός διανύσματος **a**, είναι οι προβολές του **a** σε κάθε ένα από τα διανύσματα βάσης και προσδιορίζονται από τη σχέση

$$a_i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e_i} \rangle \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots ,\, n$$

$$x_n = \langle x(t), \psi_n(t) \rangle = \int_a^b x(t)\, \psi_n^*(t)\, dt$$

Το ***μέτρο*** *(norm)* ή ***μήκος*** ενός διανύσματος, ορίζεται από τη σχέση

$$\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\|x(t)\|_2 = \langle x(t), x(t) \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt}$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$) ***καλείται ορθοκανονικό*** όταν

$$\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_m \rangle = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

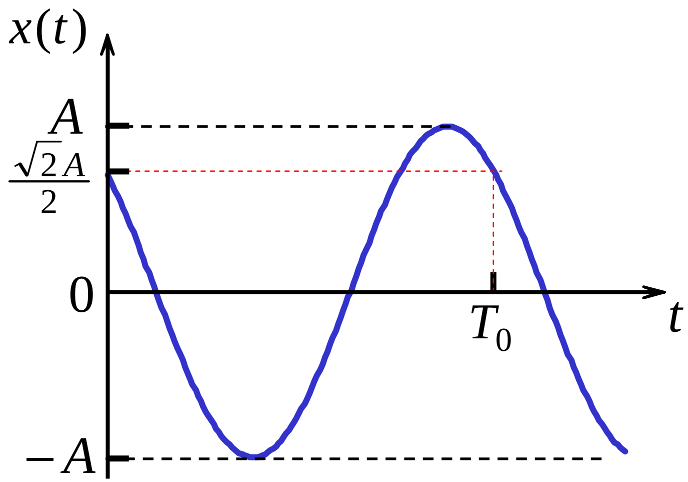
$$\langle \psi_k(t), \psi_m(t) \rangle = \delta(k-m)$$

Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

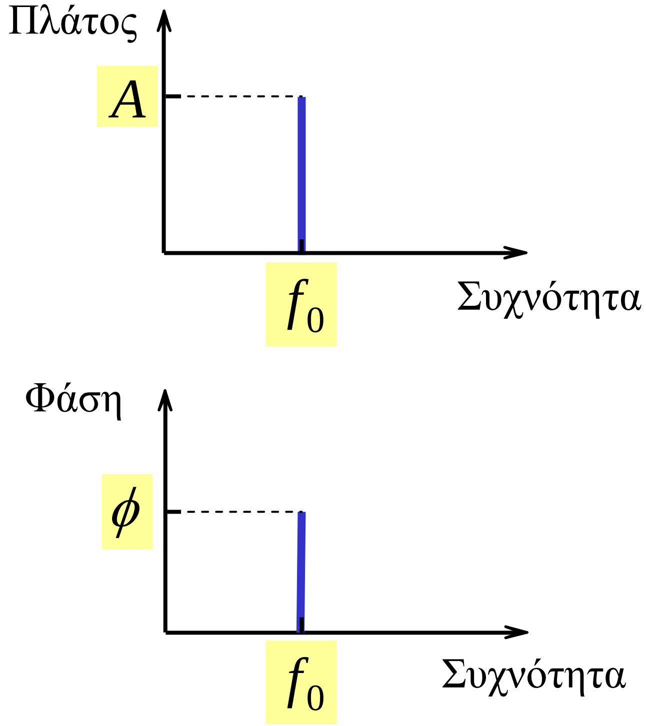
Υπάρχουν δύο τρόποι περιγραφής ενός αιτιοκρατικού σήματος. Ο πρώτος τρόπος περιγραφής πραγματοποιείται στο ***πεδίο του χρόνου***, ενώ ο δεύτερος ***στο πεδίο της συχνότητας***.

Ο πρώτος τρόπος είναι άμεσα αντιληπτός και η χρονική μεταβολή του σήματος δίδεται είτε μέσω ***αναλυτικής σχέσης*** (μαθηματικός τύπος) είτε με ***γραφική παράσταση***.

$$x(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$



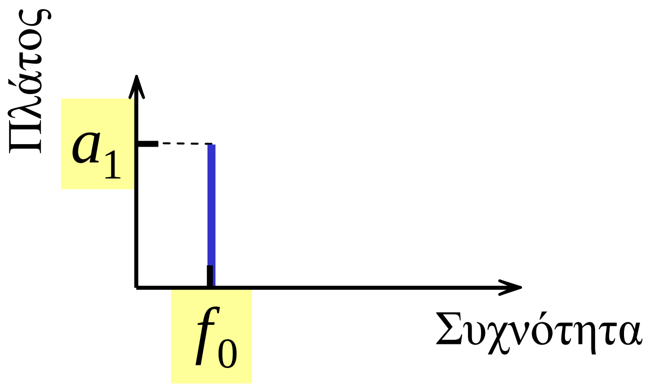
Η περιγραφή των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας περιλαμβάνει, κατά περίπτωση, τη χρήση ***της σειρά*** ή ***του μετασχηματισμού Fourier*** μέσω των οποίων ένα σήμα περιγράφεται από το ***φασματικό του περιεχόμενο.***



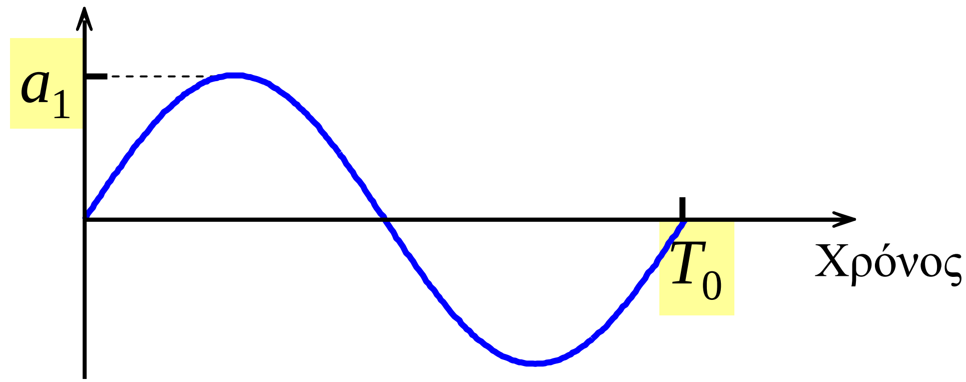
$$x(t) = A\,\sigma\upsilon\nu\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

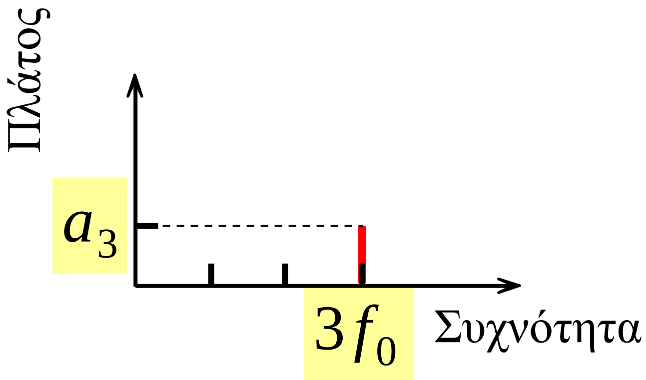
Το φάσμα του σήματος x(*t*)

Η συνάρτηση η οποία περιέχει τη φασματική περιγραφή ενός σήματος ονομάζεται ***φάσμα του σήματος***.

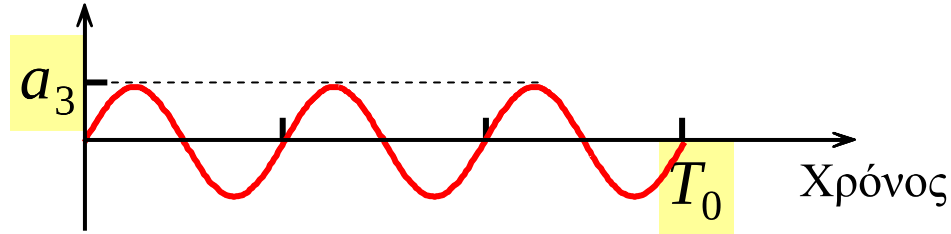


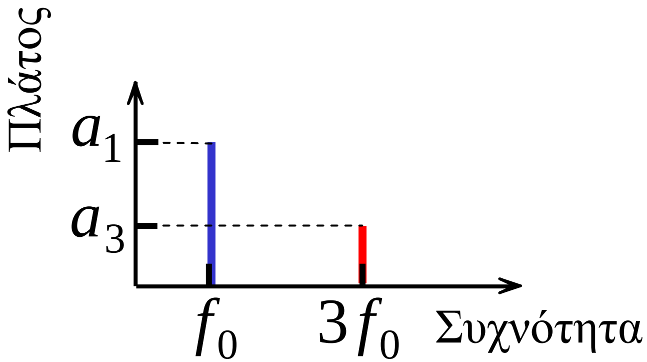
$$x_1(t) = a_1 \sin(2\pi f_0 t)$$



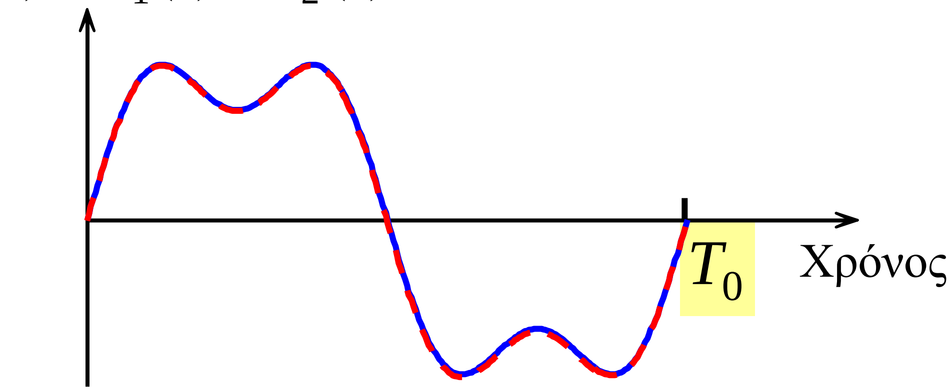


$$x_2(t) = a_3 \sin(2\pi 3 f_0 t)$$





$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



Το εσωτερικό γινόμενο δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι $\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)\, y^*(t)\, dt$

Δύο μη μηδενικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ λέγονται ***ορθογώνια*** αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$.

Θα προσδιορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των σημάτων $e^{jk\omega_0 t}$ και $e^{jm\omega_0 t}$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t}\right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t}\cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ & \end{cases}$$

$k \neq m$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t}\right\rangle = \frac{1}{j(k-m)\omega_0}\int_0^T d\, e^{j(k-m)\omega_0 t} = \frac{1}{j(k-m)\omega_0}\; e^{j(k-m)\omega_0 t}\Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\omega_0}\left[e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}T} - e^0 \right] = 0$$

$$e^{j(k-m)2\pi} = \cos\left((k-m)2\pi\right) - j\sin\left((k-m)2\pi\right) = 1 + j0$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ είναι $\langle x(t), y(t)\rangle = \int_0^t x(t)\, y^*(t)\, dt$

Δύο μη μηδενικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ λέγονται ***ορθογώνια*** αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν.

Θα προσδιορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των σημάτων $e^{jk\omega_0 t}$ και $e^{jm\omega_0 t}$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t}\right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t}\cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & k\neq m \\ T, & k = m\end{cases} = T\delta(k-m)$$

$k = m$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t}\right\rangle = \int_0^T e^{j0\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T$$

Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο των σημάτων $e^{jk\omega_0 t}$ και $e^{jm\omega_0 t}$ είναι ίσο με μηδέν για $k\neq m,$ επομένως τα σήματα είναι ορθογώνια και σχηματίζουν ***ένα σύνολο ορθογώνιων σημάτων***.

Το σύνολο των ορθογωνίων αναλογικών εκθετικών περιοδικών σημάτων

Για τα εκθετικά σήματα $e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, παρατηρούμε

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = T \cdot \delta(k-m)$$

Τα εκθετικά σήματα $e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικά διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, διάρκειας $T = 2\pi/\omega_0$, καλούνται ***αρμονικά συσχετιζόμενα εκθετικά σήματα*** και σχηματίζουν ένα ***ορθογώνιο σύνολο σημάτων***.

Επομένως κάθε σήμα $x(t)$ στο χρονικό αυτό διάστημα εκφράζεται

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

Έστω τώρα ένα σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[t_0,\ t_0 + T\,]$, και ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να αναπτυχθεί σε άθροισμα εκθετικών στοιχειωδών σημάτων,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές a_k Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

και ολοκληρώνουμε από t_0 έως $t_0 + T$,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left\langle e^{jk\omega_0 t},\ e^{jn\omega_0 t} \right\rangle$$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t}\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T, & k = n \end{cases} = T\cdot\delta(n-n)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left\langle e^{jk\omega_0 t},\ e^{jn\omega_0 t}\right\rangle$$

$$= \cdots a_{n-1} \underbrace{\overbrace{\left\langle e^{j(n-1)\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle}^{k=n-1}}_{=0} + a_n \underbrace{\overbrace{\left\langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle}^{k=n}}_{=T} + a_{n+1} \underbrace{\overbrace{\left\langle e^{j(n+1)\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle}^{k=n+1}}_{=0} \cdots$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt = T\cdot a_n \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt}$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΣΕ ΣΕΙΡΑ FOURIER - ΣΕΙΡΑ FOURIER

Εκθετική σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

Εξίσωση σύνθεσης

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Εξίσωση ανάλυσης

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Η σειρά αποτελεί την ***εκθετική σειρά Fourier*** ή *το **ανάπτυγμα Fourier*** του σήματος

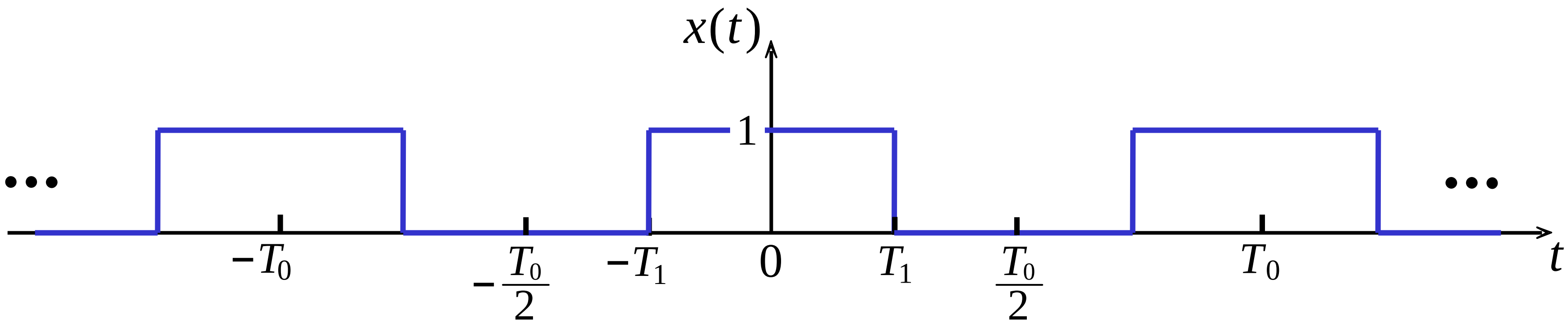
Οι μιγαδικοί συντελεστές a_k καλούνται ***συντελεστές Fourier*** ή ***φασματικές γραμμές του*** και ορίζουν ***το φάσμα*** του σήματος

Κάθε συντελεστής a_k δηλώνει το ***φασματικό περιεχόμενο*** του σήματος $x(t)$ στη συχνότητα $k\omega_0$ και ονομάζεται $k^{\sigma\tau\eta}$ ***αρμονική συνιστώσα***.

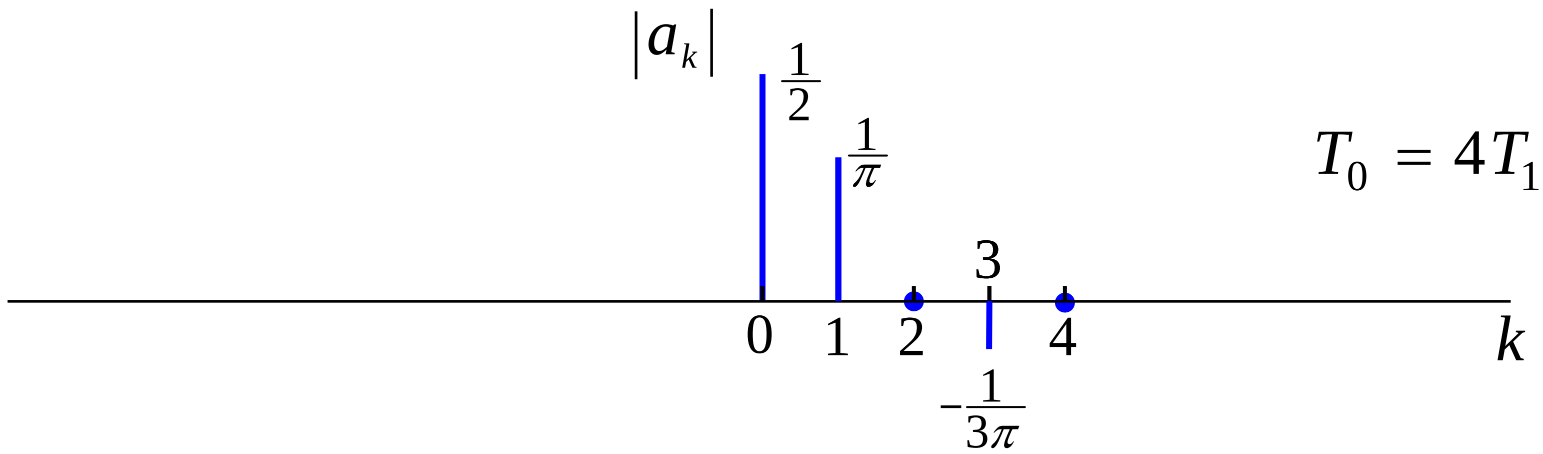
Η σταθερά a_0 είναι η ***συνεχής*** *ή* ***η σταθερά συνιστώσα*** του φάσματος.

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier για το περιοδικό ορθογώνιο σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \qquad a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

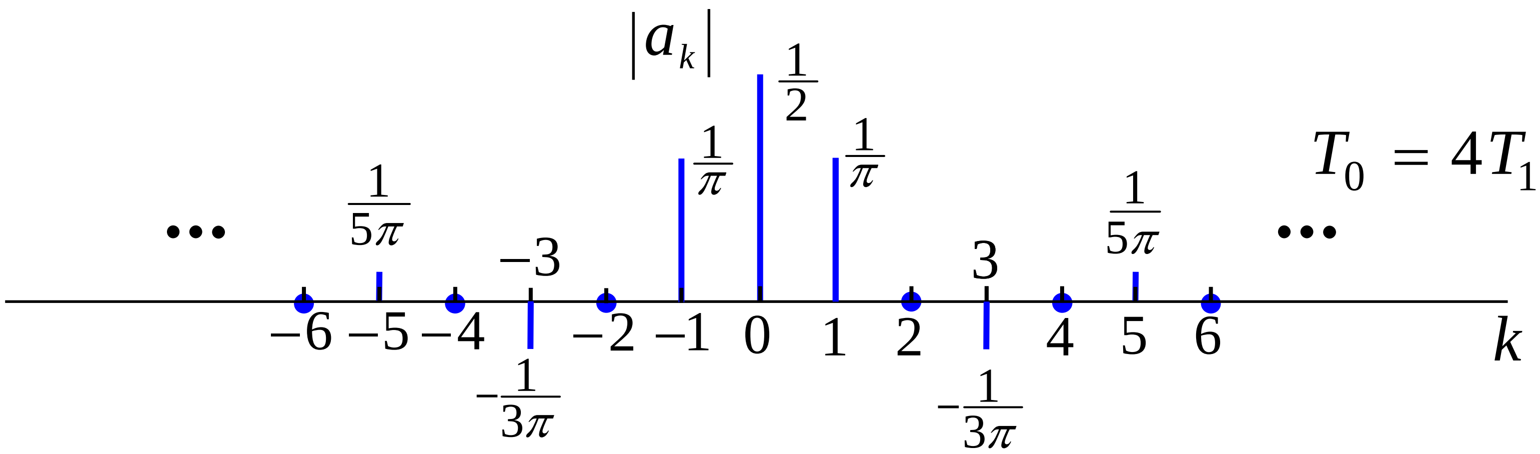


$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \overset{T_0 = 4T_1}{=} \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \overset{T_1 = \frac{1}{4}T_0}{=} \frac{\sin\left(k\omega_0 \frac{1}{4} T_0\right)}{k\pi} \xrightarrow{\omega_0 T_0 = 2\pi} a_k = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

$$a_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = \frac{1}{\pi} \qquad a_3 = \frac{\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)}{3\pi} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_2 = \frac{\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = 0 \qquad a_4 = \frac{\sin\left(4\frac{\pi}{2}\right)}{4\pi} = 0$$



$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \overset{T_0 = 4T_1}{=} \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \overset{T_1 = \frac{1}{4}T_0}{=} \frac{\sin\left(k\omega_0 \frac{1}{4} T_0\right)}{k\pi} \xrightarrow{\omega_0 T_0 = 2\pi} a_k = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

$$a_{-1} = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\pi} = \frac{1}{\pi} \qquad a_{-3} = \frac{\sin\left(-3\frac{\pi}{2}\right)}{-3\pi} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_{-2} = \frac{\sin\left(-2\frac{\pi}{2}\right)}{-2\pi} = 0 \qquad a_{-4} = \frac{\sin\left(-4\frac{\pi}{2}\right)}{-4\pi} = 0$$

Το σύνολο των ορθογωνίων αναλογικών τριγωνομετρικών περιοδικών σημάτων.

Για τα σήματα, $\sin(k\omega_0 t)$ και $\cos(k\omega_0 t)$, παρατηρούμε ότι

$$\langle \sin(k\omega_0 t), \sin(m\omega_0 t)\rangle = \frac{T}{2}\delta(k-m)$$

$$\langle \cos(k\omega_0 t), \cos(m\omega_0 t)\rangle = \frac{T}{2}\delta(k-m)$$

$$\langle \sin(k\omega_0 t), \cos(m\omega_0 t)\rangle = 0, \text{ για κάθε } k \text{ και } m$$

Τα σήματα, $\sin(k\omega_0 t)$ και $\cos(k\omega_0 t)$, $-\infty < k < \infty$, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικά διάστημα $[t_0,\ t_0+T]$, διάρκειας $T = 2\pi/\omega_0$ καλούνται ***αρμονικά συσχετιζόμενα σήματα*** και σχηματίζουν ένα ***ορθογώνιο σύνολο***.

Επομένως κάθε σήμα $x(t)$ στο χρονικό αυτό διάστημα εκφράζεται

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

Τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \cos\left(k\omega_0 t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin\left(k\omega_0 t\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, dt$$

Η ***Μέση Τιμή*** του σήματος

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos\left(k\omega_0 t\right)\, dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$c_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin\left(k\omega_0 t\right)\, dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$b\cos(\varphi)+c\sin(\varphi)=A\cos(\varphi+\theta) \quad \text{όπου} \quad A=\sqrt{b^2+c^2} \quad \text{και} \quad \theta=-\tan^{-1}\frac{c}{b}$$

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\cos\left(k\omega_0 t\right)+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot\sin\left(k\omega_0 t\right)$$

$$x(t)=a_0+\underbrace{b_1\cos(\omega_0 t)+c_1\sin(\omega_0 t)}+\underbrace{b_2\cos(2\omega_0 t)+c_2\sin(2\omega_0 t)}+\ldots$$

$$x(t)=a_0+A_1\cos(\omega_0 t+\theta_1)+A_2\cos(2\omega_0 t+\theta_2)+\ldots$$

$$A_1=\sqrt{b_1^2+c_1^2} \qquad A_2=\sqrt{b_2^2+c_2^2}$$

$$\theta_1=-\tan^{-1}\frac{c_1}{b_1} \qquad \theta_2=-\tan^{-1}\frac{c_2}{b_2}$$

Γενικά

$$x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cdot\cos\left(k\omega_0 t+\theta_k\right)$$

$$A_0=a_0 \quad A_k=\sqrt{b_k^2+c_k^2} \quad \text{και} \quad \theta_k=-\tan^{-1}\frac{c_k}{b_k}$$

Σειρές Fourier	
$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$	$a_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt$
$x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cdot\cos\left(k\omega_0 t+\theta_k\right)$	$A_k=2\left\lvert a_k\right\rvert$
$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\cos\left(k\omega_0 t\right)+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot\sin\left(k\omega_0 t\right)$	$2a_k=b_k-j\,c_k$

Παρατηρούμε ότι τα πλάτη του τριγωνομετρικού αναπτύγματος A_k είναι ίσα με το διπλάσιο των αντιστοίχων συντελεστών του εκθετικού αναπτύγματος a_k.

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier για τα σήματα:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) \qquad x(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

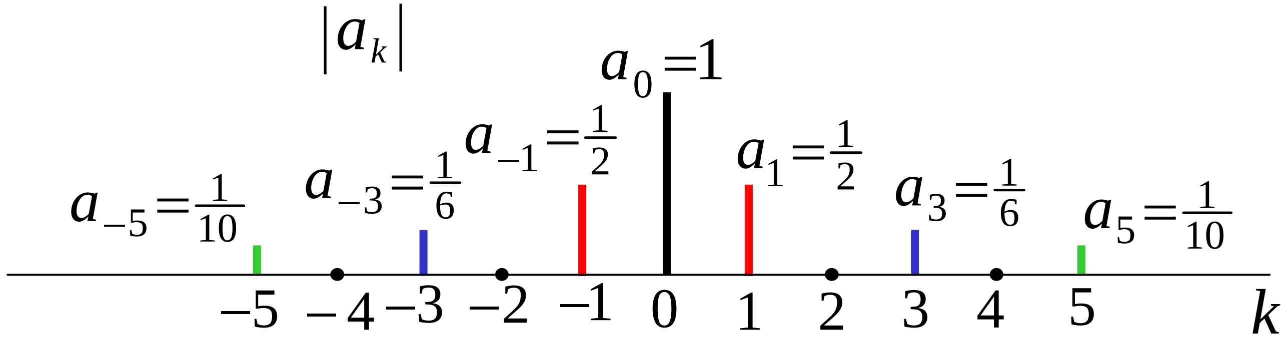
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$k=-2 \qquad k=-1 \qquad k=0 \qquad k=1 \qquad k=2 \qquad k=3$$

$$x(t) = \cdots + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} + \cdots$$

Κατασκευή του σήματος $x(t)$ από αρμονικά συσχετιζόμενα συνημίτονα. Φυσική σημασία της εκθετικής σειράς Fourier.

$$x(t)=\sum_{k=-5}^{5} a_k\, e^{jk2\pi t}$$



$k=-5$ $\quad$ $k=-3$ $\quad$ $k=-1$ $\quad$ $k=0$ $\quad$ $k=1$ $\quad$ $k=3$ $\quad$ $k=-5$

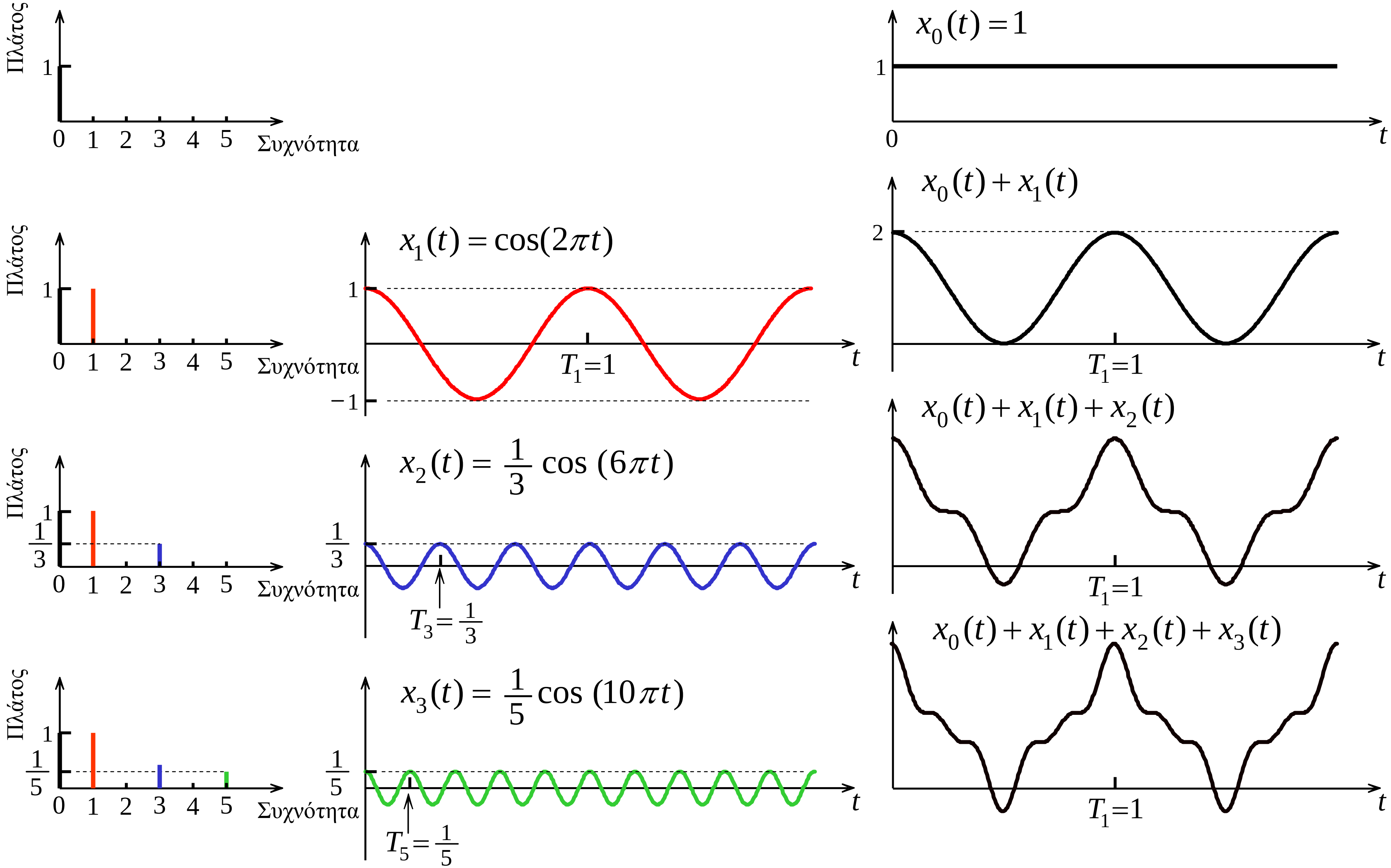
$$x(t)=\frac{1}{10}e^{-j10\pi t}+\frac{1}{6}e^{-j6\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}+1+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}+\frac{1}{6}e^{j6\pi t}+\frac{1}{10}e^{j10\pi t}$$

$$x(t)=1+\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}\right)}+\frac{1}{6}\underbrace{\left(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t}\right)}+\frac{1}{10}\underbrace{\left(e^{j10\pi t}+e^{-j10\pi t}\right)}$$

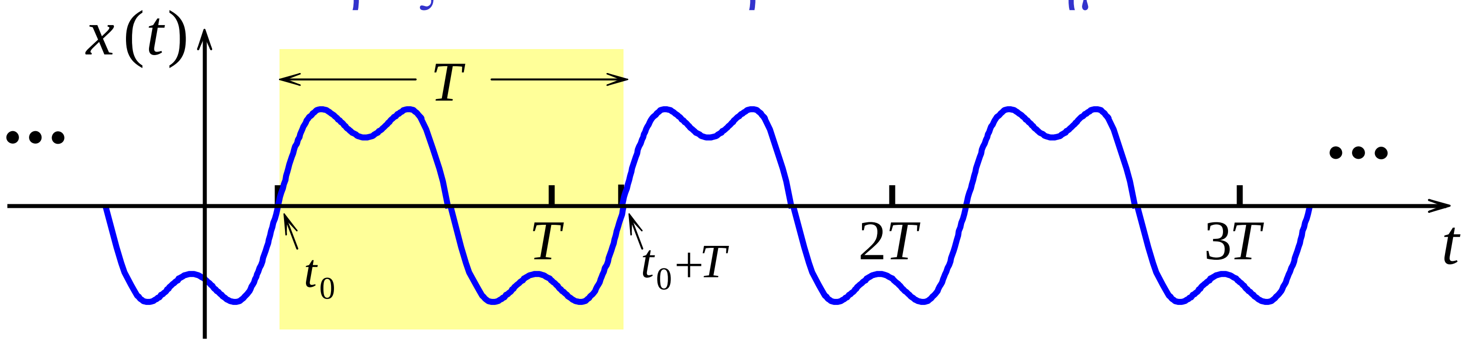
$$x(t)=1+\cos(2\pi t)+\frac{1}{3}\cos(6\pi t)+\frac{1}{5}\cos(10\pi t)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{j2\pi t}&=\cos(2\pi t)+j\sin(2\pi t)\\ e^{-j2\pi t}&=\cos(2\pi t)-j\sin(2\pi t)\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{πρόσθεση}}\quad e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}=2\cos(2\pi t)$$

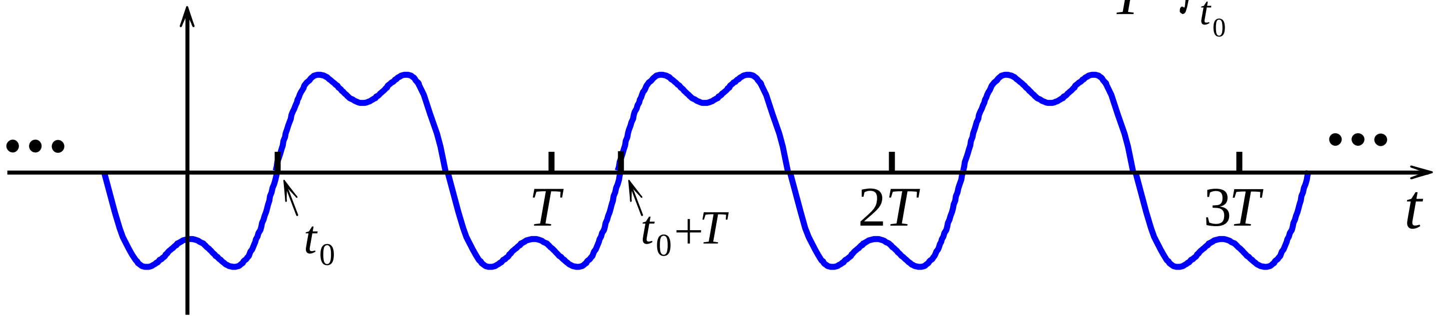
$$x(t) = \sum_{k=-5}^{5} a_k \, e^{jk2\pi t} \qquad x(t) = 1 + \cos(2\pi t) + \frac{1}{3}\cos(6\pi t) + \frac{1}{5}\cos(10\pi t)$$



Σειρές Fourier περιοδικών σημάτων



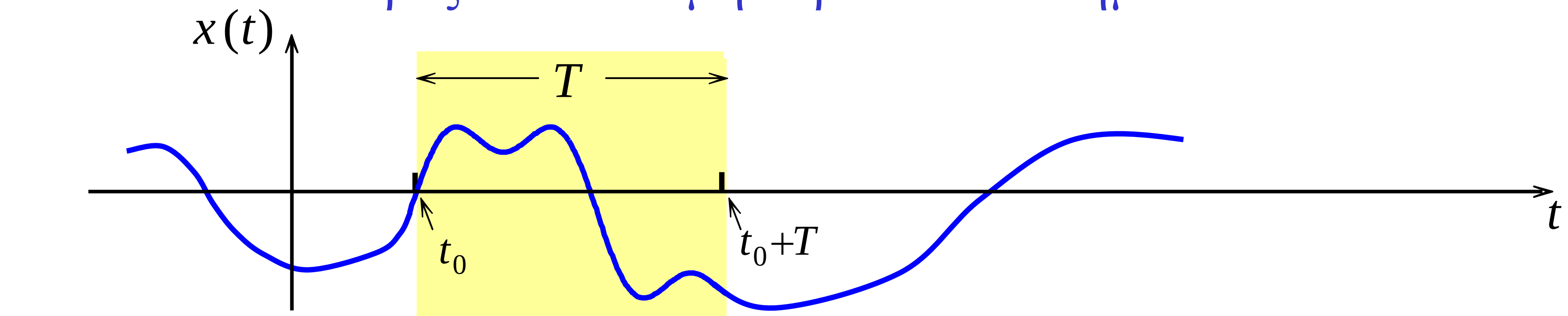
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \qquad a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt$$



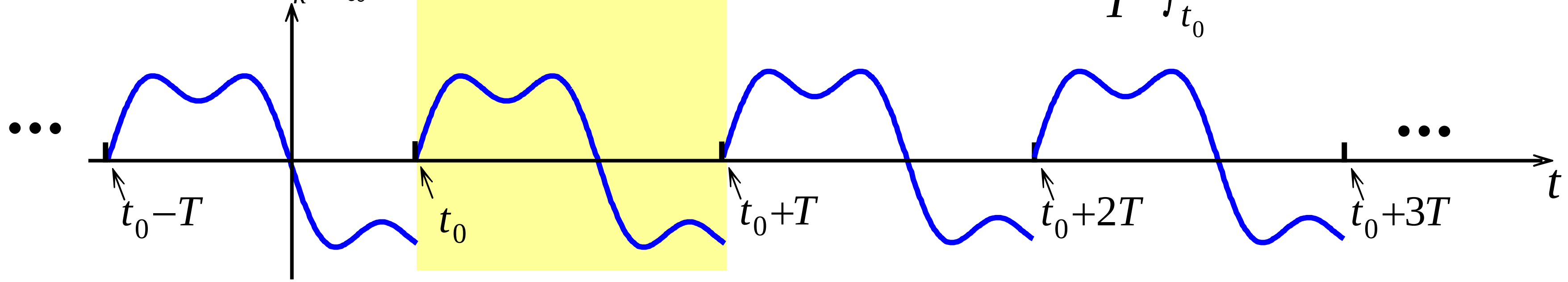
Ορίσαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος, $x(t+T) = x(t)$, σ' ένα διάστημα $[t_0, t_0+T\,]$. Παρατηρούμε ότι η σειρά Fourier $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ συγκλίνει στο σήμα $x(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t, δηλαδή

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \qquad -\infty < t < \infty$$

Σειρές Fourier μη περιοδικών σημάτων



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \qquad a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt$$



Ορίσαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός μη περιοδικού σήματος σ' ένα διάστημα $[t_0, t_0+T]$. Έξω από το διάστημα αυτό η σειρά Fourier $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη στο σήμα $x(t)$, δηλαδή

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \qquad t_0 < t < t_0+T$$

Ύπαρξη σειράς Fourier

1. ***Ικανή Συνθήκη***: Σε κάθε περίοδο το σήμα $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο:

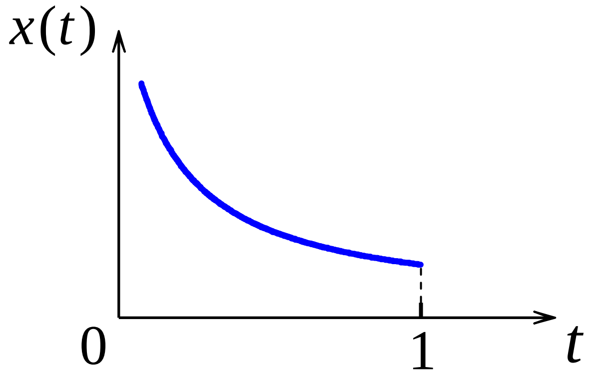
$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|\, dt < +\infty$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει ότι κάθε συντελεστής α_k είναι πεπερασμένος

$$|a_k| = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left|x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\right| dt \le \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|\, dt < +\infty$$

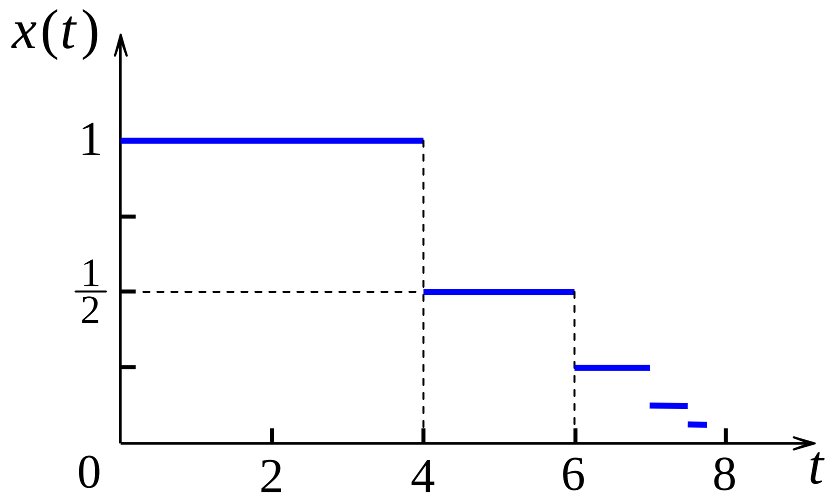
Ένα σήμα το οποίο παραβαίνει τη συνθήκη αυτή είναι το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \le 1$$



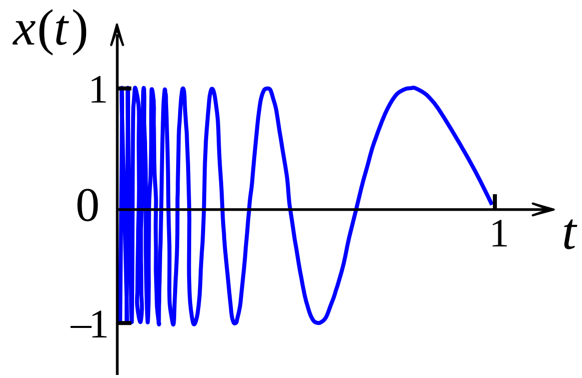
2. ***Ικανή Συνθήκη***: Το σήμα $x(t)$ σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα είναι συνεχές ή να περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, κάθε μία από τις οποίες να είναι πεπερασμένου ύψους.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 1/2, & 4 \le t < 6 \\ 1/4, & 6 \le t < 7 \\ \vdots, & \vdots \end{cases}$$



3. ***Ικανή Συνθήκη***: Το σήμα $x(t)$ σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα να είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή να υπάρχουν πεπερασμένος αριθμός μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα.

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \le 1$$



Φαινόμενο Gibbs

Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ από το πεπερασμένο άθροισμα

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

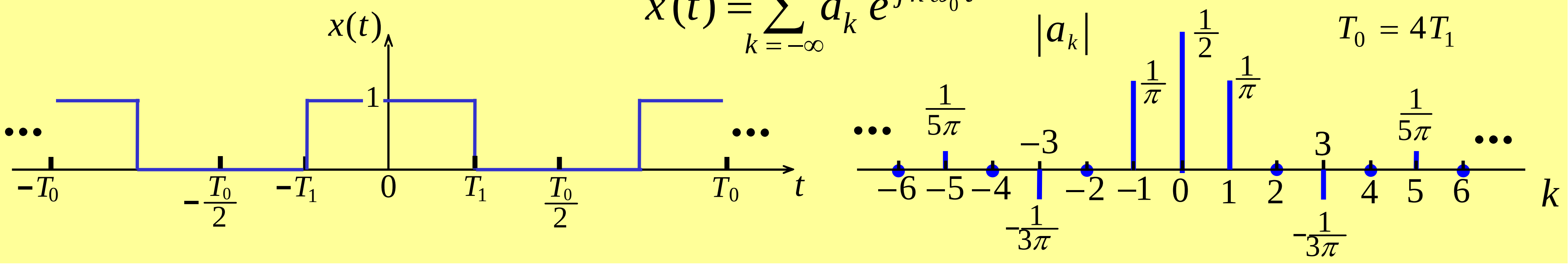
Το σφάλμα προσέγγισης είναι: $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

Εφαρμογή: Για $N = 1$ έχουμε

$$x_1(t) = \sum_{k=-1}^{+1} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

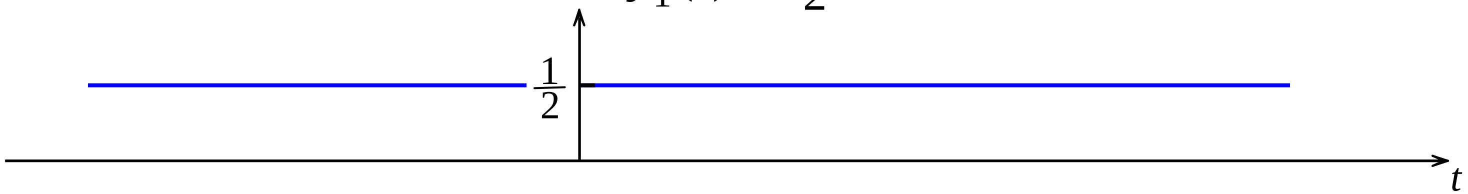
$$e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} = 2\cos(\omega_0 t) \longrightarrow x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

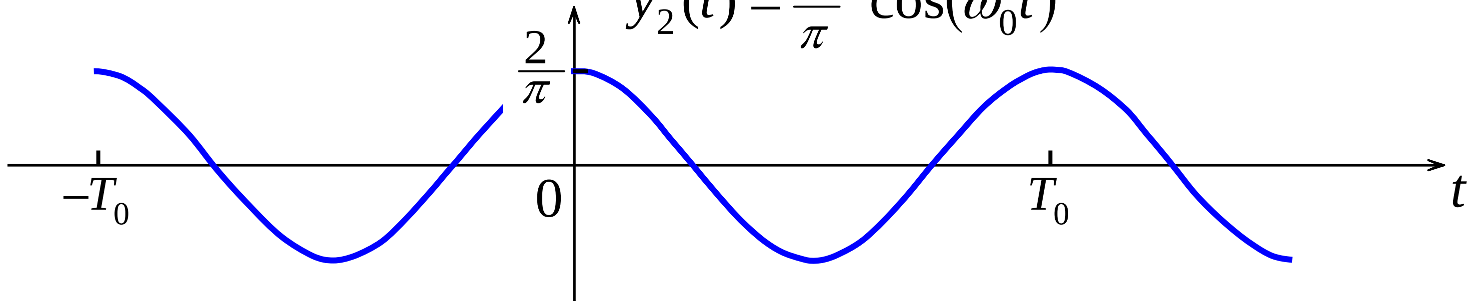


$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t)$$

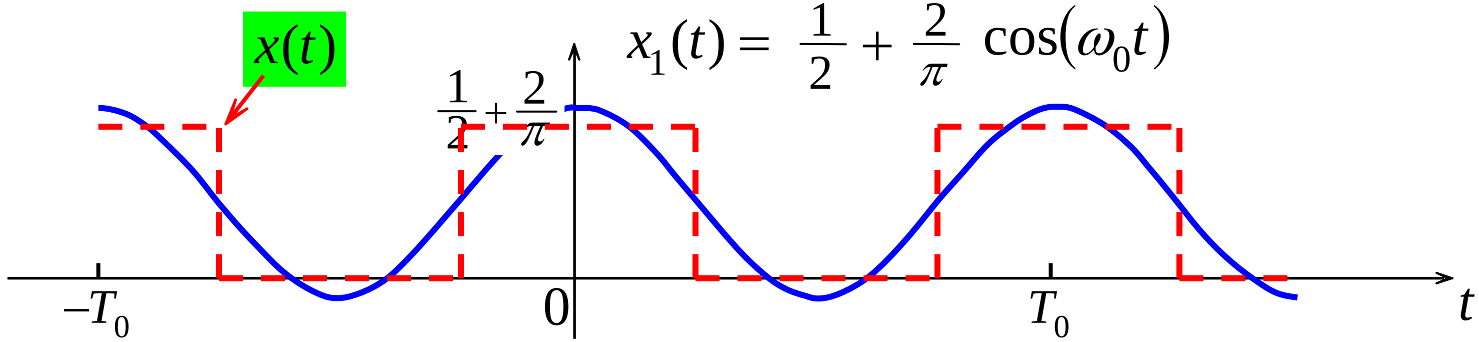
$$y_1(t) = \frac{1}{2}$$



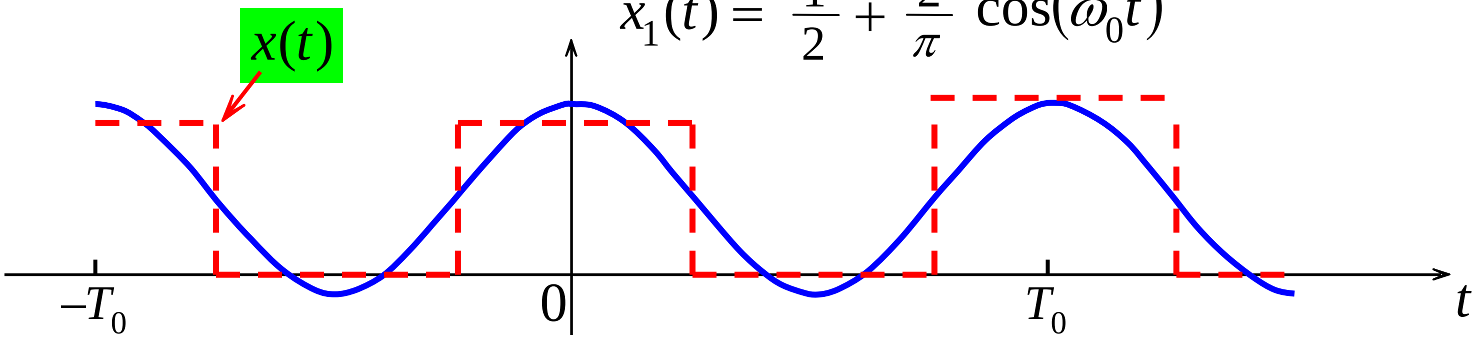
$$y_2(t) = \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t)$$



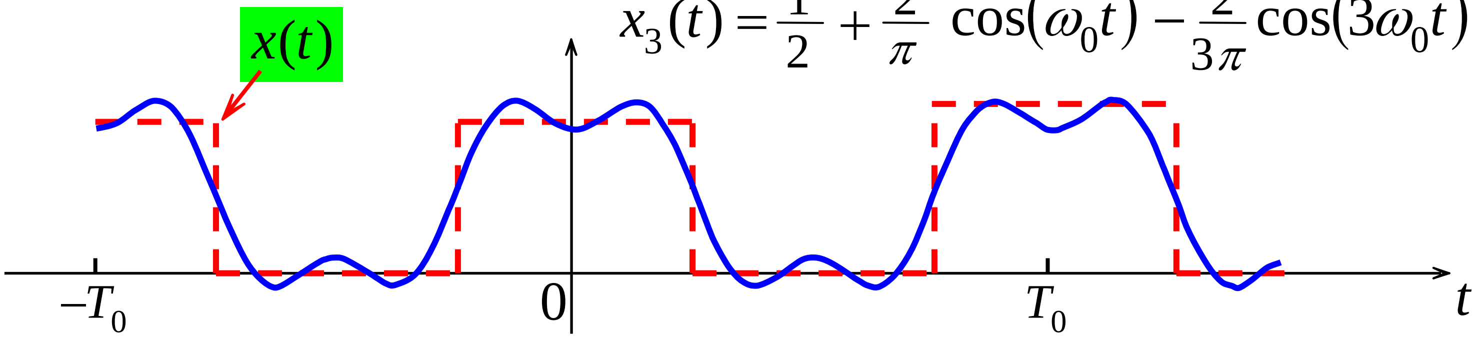
$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t)$$



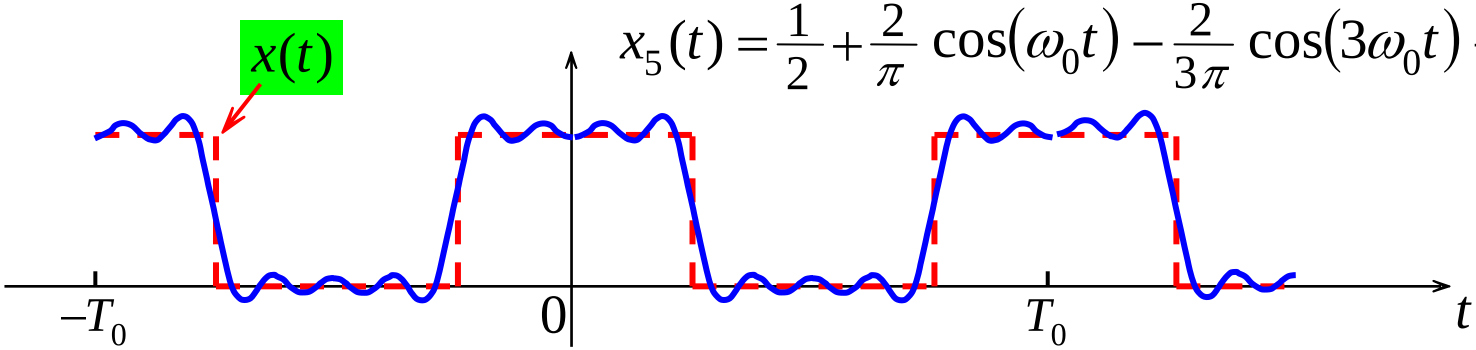
$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t)$$

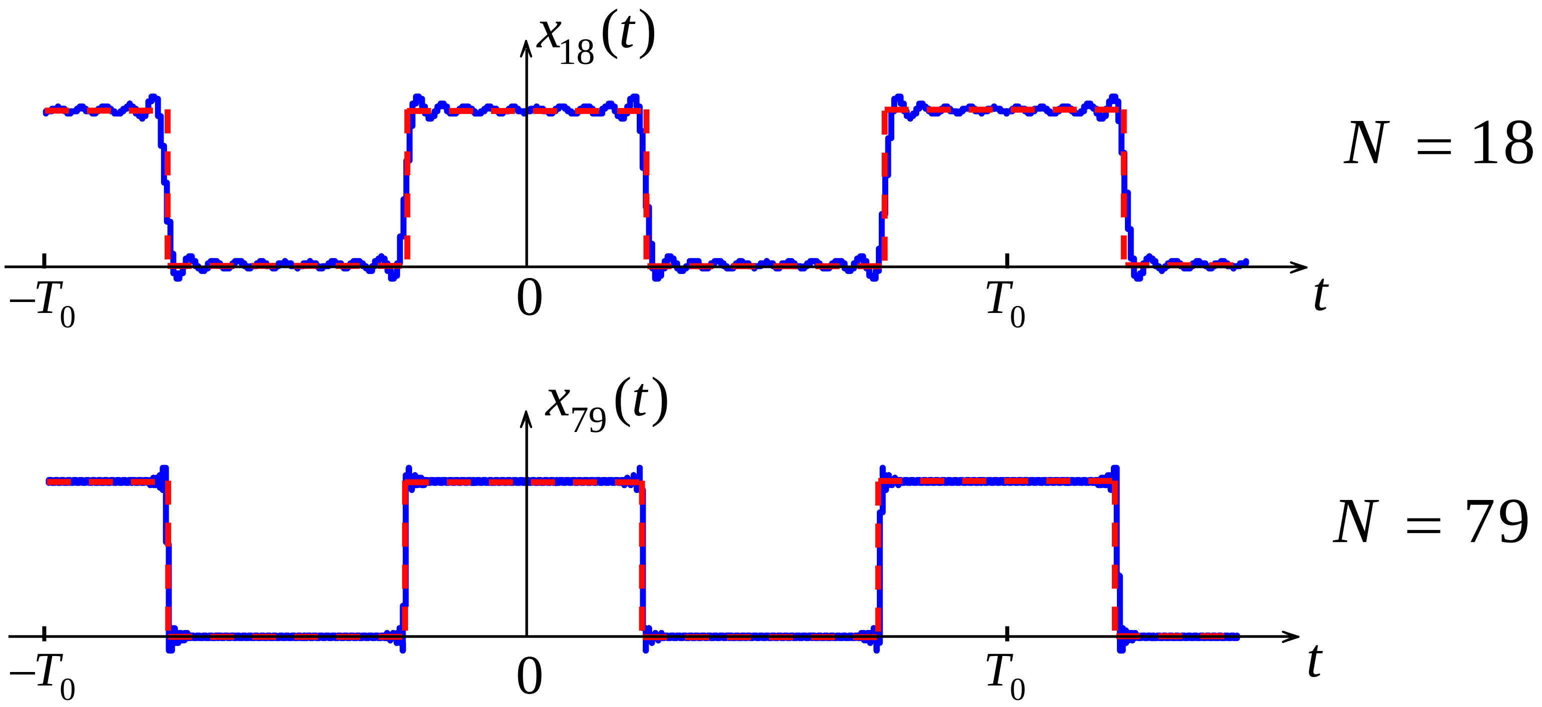


$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t)$$



$$x_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t)$$





Στα σημεία ασυνέχειας του $x(t)$ το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier δίνει τη μέση τιμή του αριστερού και του δεξιού ορίου του σήματος, δηλαδή

$$x_N(t) = \frac{1}{2}\left[x(t^-) + x(t^+)\right]$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς κάθε όρου της εκθετικής σειράς Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Απάντηση

$$P_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \cdot a_k^*\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{|a_k|^2}{T}\int_{\langle T\rangle} dt \;\; = \left|a_k\right|^2$$

Ταυτότητα του Parseval

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Η ***ολική μέση ισχύς*** ενός περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων όλων των όρων της εκθετικής σειράς Fourier, πράγματι,

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\cdot x^*(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^*\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^*\cdot a_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Αν το σήμα είναι πραγματικό λόγω της $\alpha_k^* = \alpha_{-k}$ έχουμε

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt = |a_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς κάθε όρου της τριγωνομετρικής σειράς Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\,\omega_0 t + \theta_k\right)$$

$$P_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2\, dt \qquad = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} A_k^2 \cos^2(k\omega_0 t + \theta_k)\, dt$$

$$\overset{\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}}{=} \quad \frac{A_k^2}{T}\int_{\langle T \rangle} \frac{1+\cos 2(k\omega_0 t + \theta_k)}{2} dt$$

$$= \frac{A_k^2}{2T}\int_{\langle T \rangle} dt \; + \; \frac{A_k^2}{T}\int_{\langle T \rangle} \frac{\cos 2(k\omega_0 t + \theta_k)}{2} dt$$

Απάντηση

$$P_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} A_k^2 \cos^2\left(k\,\omega_0 t + \theta_k\right) dt = \frac{A_k^2}{2}$$

Παρατηρήσεις

Στο τριγωνομετρικό ανάπτυγμα Fourier το σήμα $x(t)$ έχει αναλυθεί σε ένα άθροισμα συνημιτόνων, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετικό πλάτος A_k και φάση θ_k.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\omega_0 t + \theta_k\right)$$

παρατηρούμε ότι δεν υπεισέρχονται αρνητικές συχνότητες.

Στην εκθετική σειρά Fourier το σήμα $x(t)$ έχει αναλυθεί σε ένα άθροισμα εκθετικών σημάτων, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετικό πλάτος a_k.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

παρατηρούμε ότι τώρα υπεισέρχονται στο άθροισμα αρνητικές συχνότητες. Οι αρνητικές συχνότητες υπεισέρχονται στο άθροισμα επειδή αναπτύσσουμε ένα πραγματικό σήμα με τη βοήθεια μιγαδικών συναρτήσεων.

Η μέση ισχύς κάθε όρου της τριγωνομετρικής σειράς Fourier είναι

$$P_k = \frac{A_k^2}{2}$$

Η μέση ισχύς κάθε όρου της εκθετικής σειράς Fourier είναι

$$P_k = |a_k|^2$$

Για πραγματικά σήματα $x^*(t) = x(t)$ $a_k^* = a_{-k}$ ή $|a_k| = |a_{-k}|$, δηλαδή

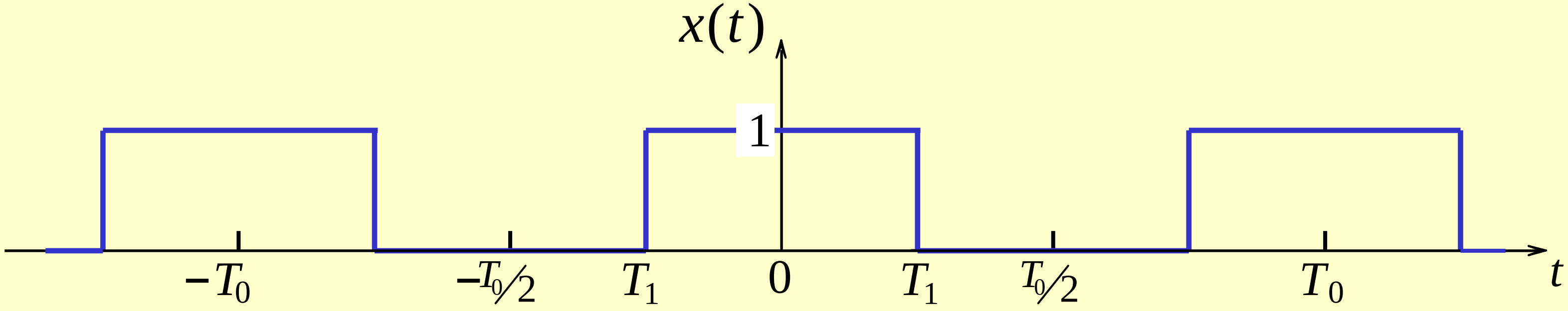
$$P_{k^{\sigma\tau\eta\varsigma}} = |a_k|^2 = |a_{-k}|^2 = P_{-k^{\sigma\tau\eta\varsigma}}$$

Επίσης για πραγματικά σήματα επειδή $A_k = 2\,|a_k|$ έχουμε

$$P_k = \frac{A_k^2}{2} = |a_k|^2 + |a_{-k}|^2$$

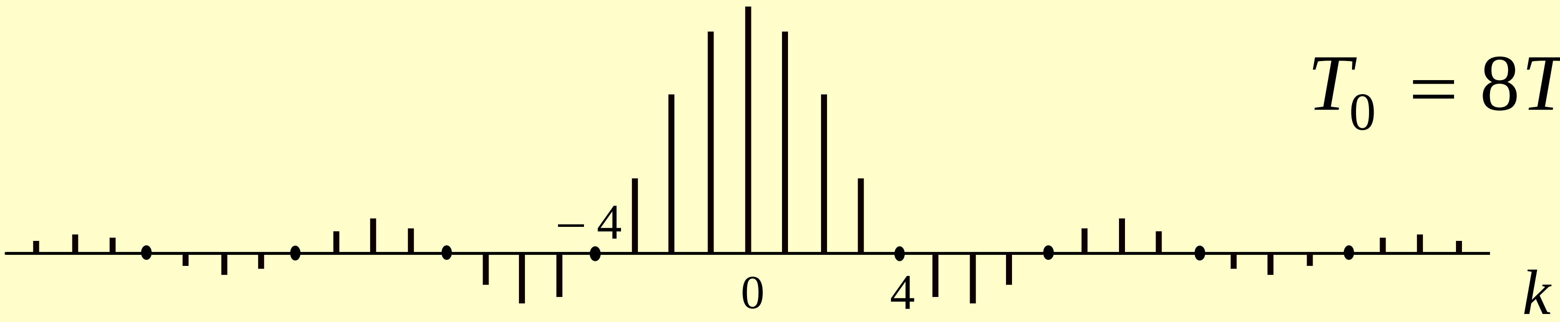
Η ύπαρξη αρνητικής συχνότητας, για πραγματικά σήματα είναι ***απόρροια*** της αναπαράστασης του σήματος με τη βοήθεια μιγαδικών σημάτων και έχει ως αποτέλεσμα ***να μοιράζει εξίσου*** την ισχύ μεταξύ θετικής και αρνητικής αρμονικής.

Για το περιοδικό ορθογώνιο σήμα $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$



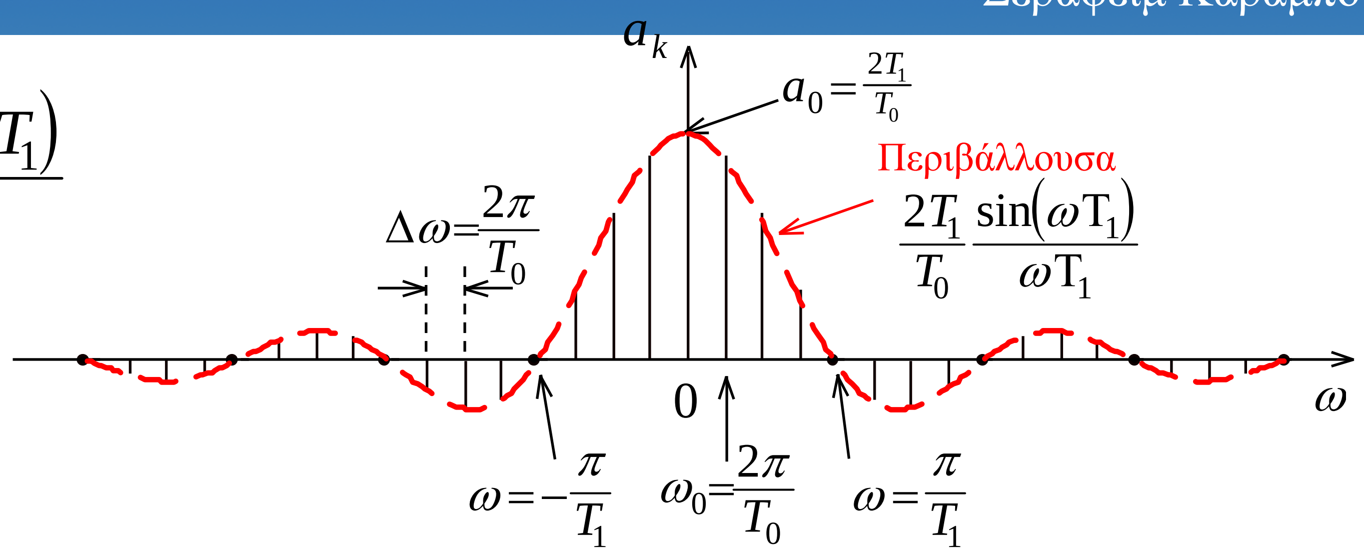
Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι

$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \qquad a_k = \frac{\sin\left(k\omega_0 T_1\right)}{k\pi}$$



$$T_0 = 8T_1$$

$$a_k = \frac{2\sin(k\,\omega_0 T_1)}{k\,\omega_0 T_0}$$



① Η συνεχής συνιστώσα του φάσματος είναι $a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$

② Η θεμελειώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

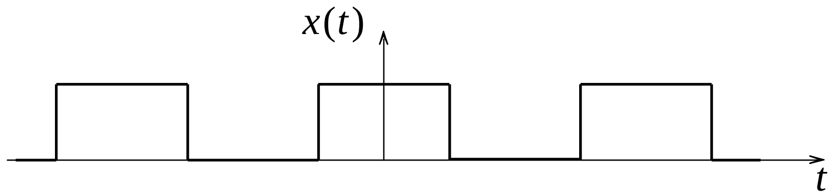
③ Η απόσταση μεταξύ των φασματικών γραμμών είναι $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0}$

④ Ο πρώτος μηδενισμός της περιβάλλουσας του φάσματος γίνεται όταν $\sin(k\,\omega_0 T_1) = 0 \Rightarrow k = \frac{T_0}{2T_1}$

⑤ Η συχνότητα του πρώτου μηδενισμού είναι $\omega = \frac{\pi}{T_1}$

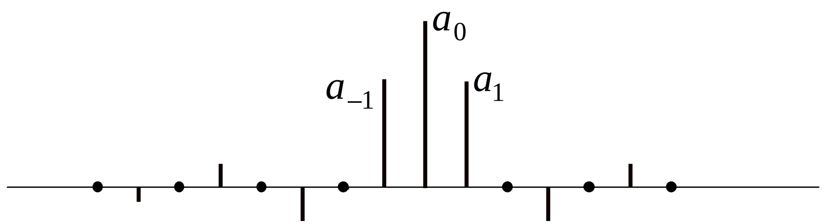
Στο ***ανάπτυγμα σε σειρά Fourier***, η εξίσωση ανάλυσης

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



αναλύει ένα σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, (ή στο διάστημα (-∞, ∞) αν το σήμα είναι περιοδικό), σε ένα ***διακριτό φάσμα*** περιοδικών εκθετικών σημάτων με συχνότητες $k\omega_0$, με πλάτος a_k.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$



Όταν το σήμα $x(t)$ είναι ***σήμα τάσης*** η μονάδα μέτρησης των συντελεστών a_k είναι "***Volts***".

Με άλλα λόγια το ***ανάπτυγμα Fourier των περιοδικών*** σημάτων αναπαριστά μη περιοδικά σήματα με εκθετικά σήματα και με το τρόπο αυτό αποκαλύπτει το φασματικό του περιεχόμενο.

Όταν το σήμα ***δεν είναι περιοδικό*** τότε ***ο μετασχηματισμός Fourier*** αναπαριστά το σήματα με εκθετικά σήματα και με το τρόπο αυτό αποκαλύπτει το φασματικό του περιεχόμενο.

Ο Μετασχηματισμός Fourier ή το φάσμα του $x(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

ή

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

Η συνάρτηση $X(\omega)$ αποτελεί την ***εξίσωση ανάλυσης*** και είναι ο ***Μετασχηματισμός Fourier*** (MF) του σήματος $x(t)$.

Ακριβέστερα, μετασχηματισμός Fourier είναι ο κανόνας εύρεσης της $X(\omega)$ από την $x(t)$.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

ή

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$$

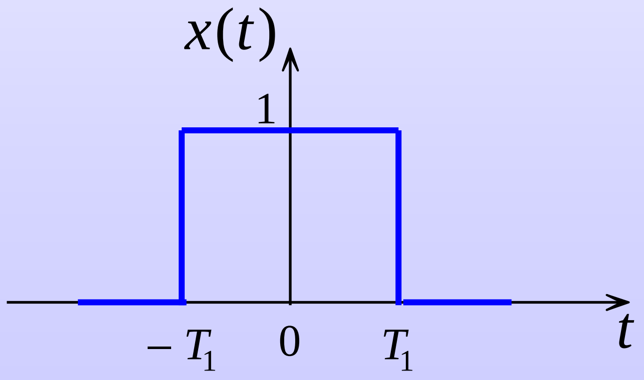
Η εξίσωση αποτελεί την ***εξίσωση σύνθεσης*** και ανασυνθέτει το σήμα στο πεδίο του χρόνου

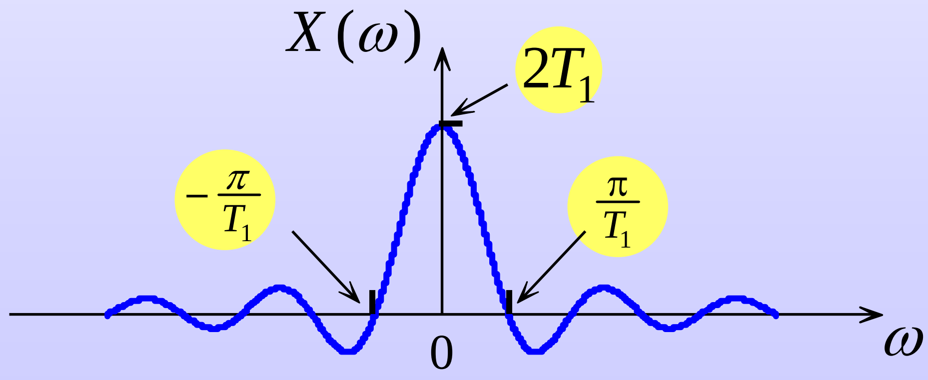
- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού διάρκειας T_1.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απάντηση:

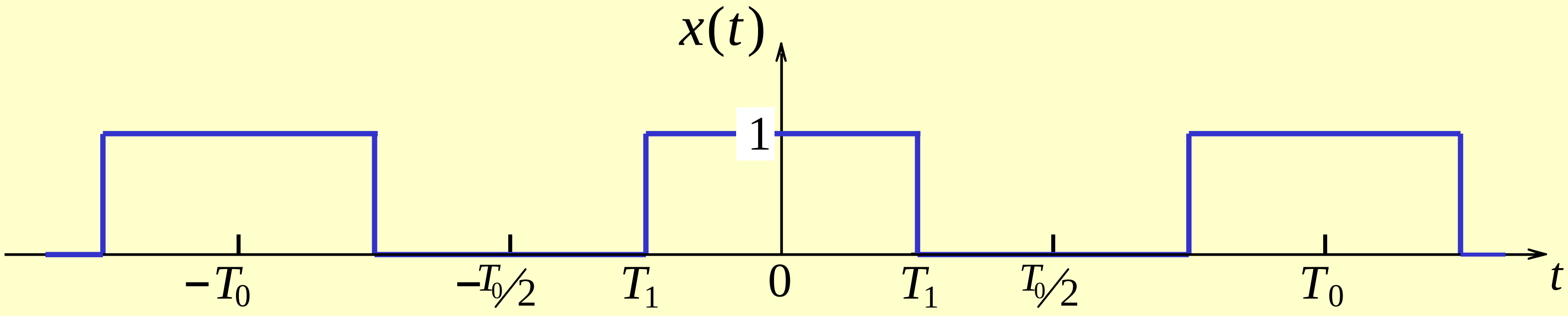
$$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$





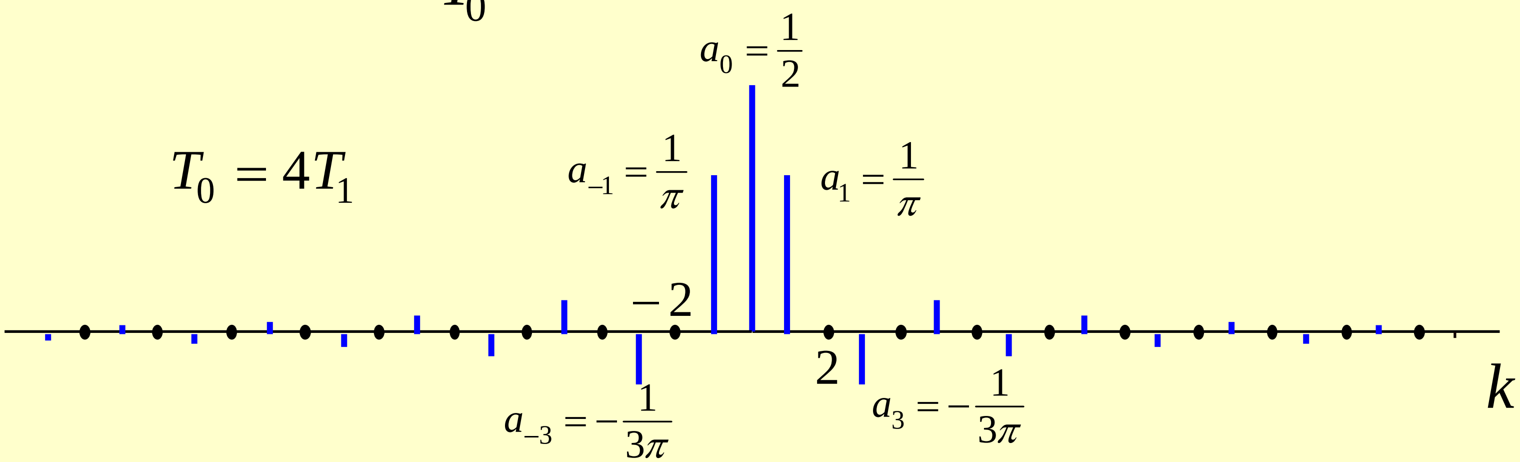
Συνεχές φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων

Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier για το ***περιοδικό ορθογώνιο σήμα***.



$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \qquad\qquad a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$T_0 = 4T_1$$



Διακρικό φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων με αρμονικά συσχετιζόμενες συχνότητες

Στο μετασχηματισμό Fourier, η εξίσωση ανάλυσης

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ σ' ένα ***συνεχές φάσμα*** περιοδικών εκθετικών σημάτων.

$X(\omega)$ είναι ***το φασματικό περιεχόμενο*** στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\omega,\ \omega + \mathrm{d}\omega]$.

Η συνεισφορά των συχνοτήτων $[\omega,\ \omega + \mathrm{d}\omega]$ έχει "πλάτος"

$$X(\omega) \cdot \frac{d\omega}{2\pi} \quad ή \quad X(f) \cdot df$$

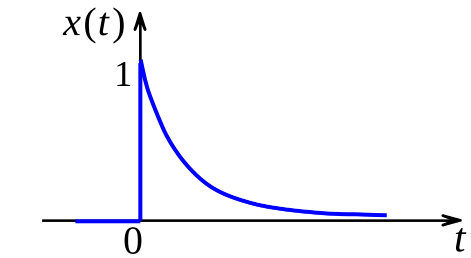
Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ είναι η ***φασματική πυκνότητα πλάτους***.

Όταν $x(t)$ είναι σήμα τάσης, τότε ο $X(\omega)$ έχει μονάδα μέτρησης "***Volts ανά μονάδα συχνότητας***".

Ο ***μετασχηματισμός Fourier*** παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από ***το πεδίο του χρόνου*** στο ***πεδίο συχνότητας***.

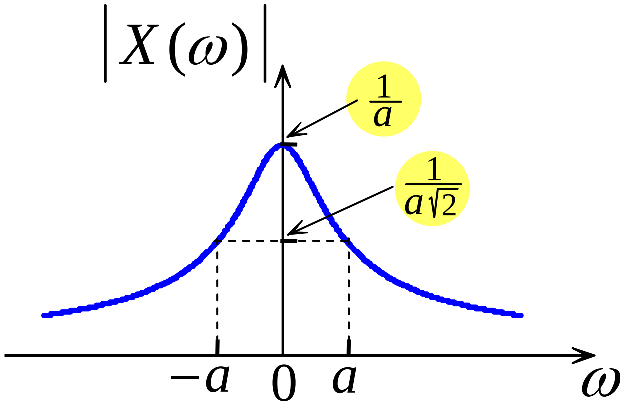
Με το μετασχηματισμό Fourier αναλύουμε μη περιοδικά σήματα με εκθετικά σήματα και με το τρόπο αυτό ***αποκαλύπτεται το φασματικό τους περιεχόμενο***.

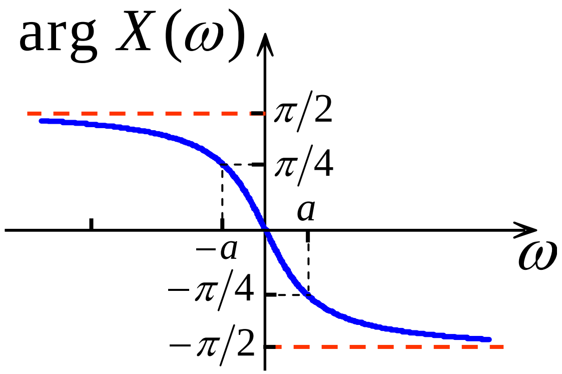
Το αιτιατό εκθετικό σήμα $x(t) = e^{-at}u(t), \ a \in R$



Το αιτιατό εκθετικό σήμα $x(t)$.

έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$



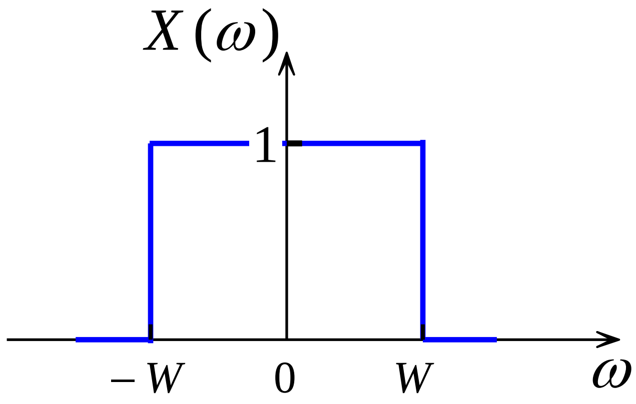


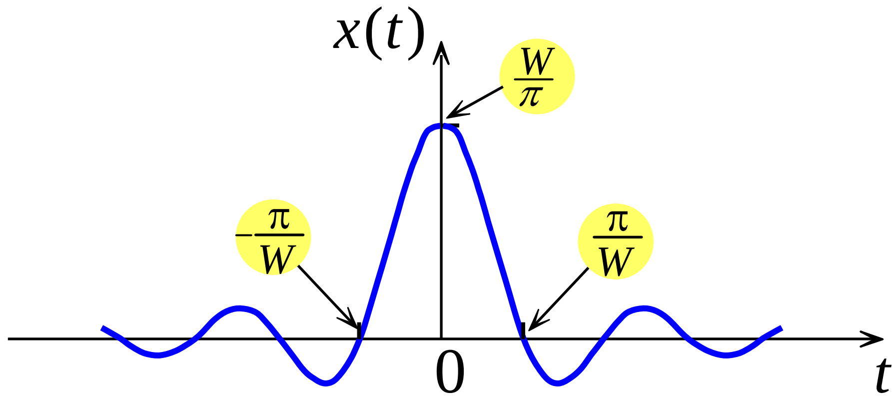
- Να υπολογιστεί το σήμα, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι, παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος W, δηλαδή,

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απάντηση

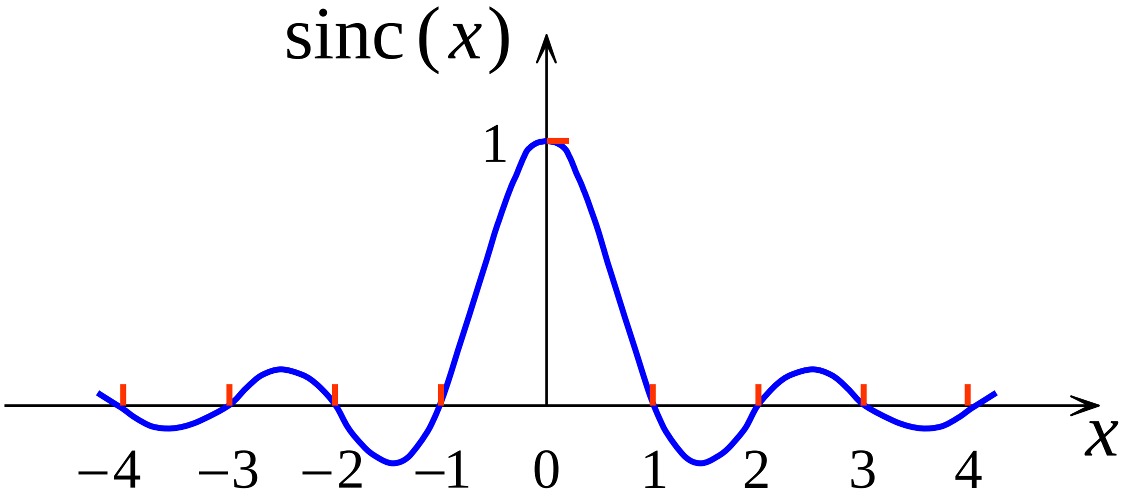
$$x(t) = \frac{\sin(W\,t)}{\pi\,t}$$

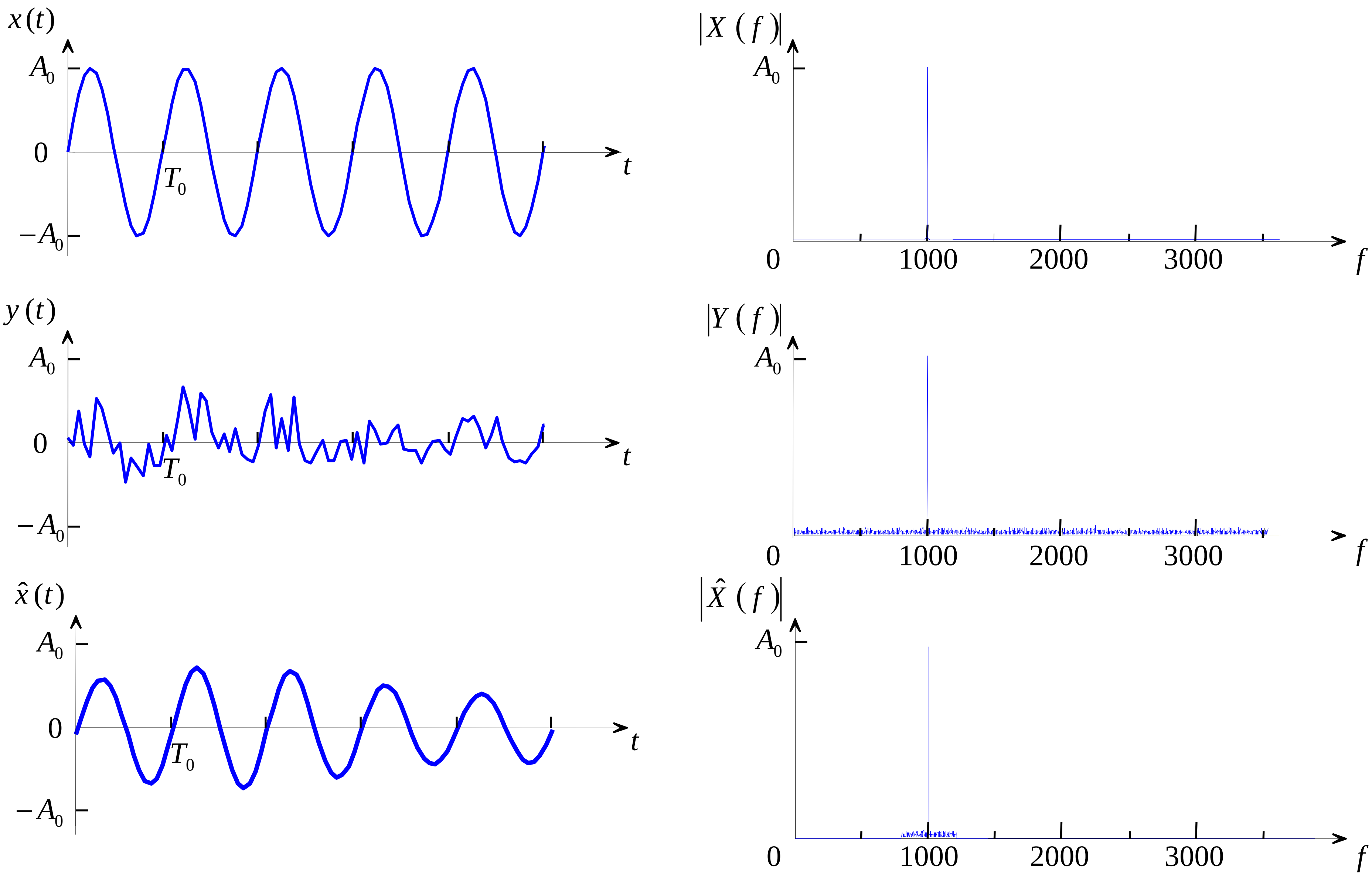




Συνάρτηση Δειγματοληψίας

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$




$x(t)$
A_0
0
$-A_0$
T_0
t
$|X(f)|$
A_0
0
1000
2000
3000
f
$y(t)$
A_0
0
$-A_0$
T_0
t
$|Y(f)|$
A_0
0
1000
2000
3000
f
$\hat{x}(t)$
A_0
0
$-A_0$
T_0
t
$|\hat{X}(f)|$
A_0
0
1000
2000
3000
f

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

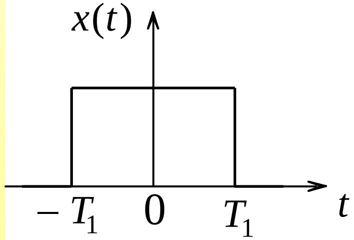
$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad F\{x(t)\} = X(\omega)$$

- **Συζυγία**

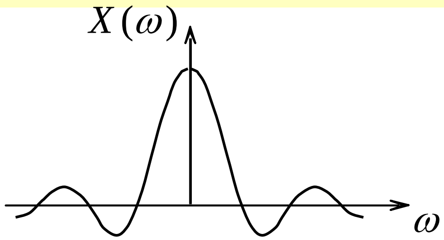
$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$

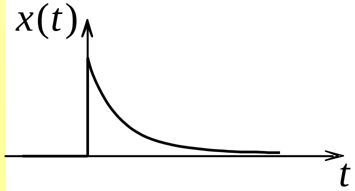
- **Γραμμικότητα**

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \xleftrightarrow{F} c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega)$$

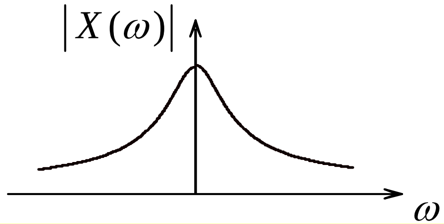


$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$





$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$



Άρτιο-περιττό μέρος σήματος. Πραγματικό-φανταστικό μέρος φάσματος

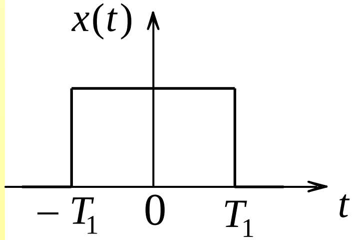
$$x_e(t) \xleftrightarrow{F} \Re e\left\{X(\omega)\right\}$$

$$x_o(t) \xleftrightarrow{F} j\,\Im m\left\{X(\omega)\right\}$$

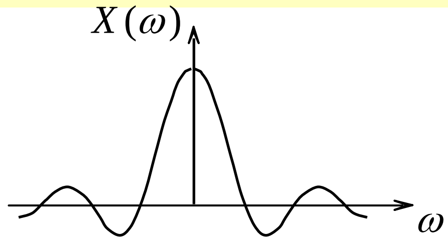
Ολίσθηση στο χρόνο

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

για κάθε πραγματικό αριθμό t_0.



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

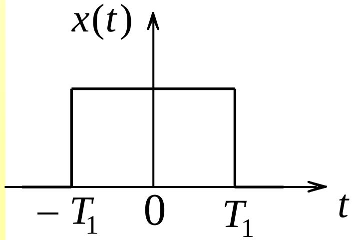


$$x(t-T_1) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le 2T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} e^{-j\omega T_1}$$

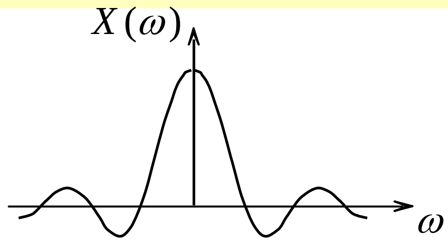
Ολίσθηση συχνότητας

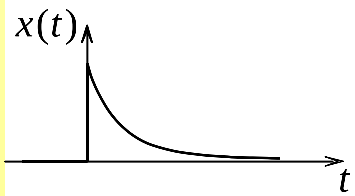
$$e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0)$$

Η ιδιότητα αυτή αποτελεί τη βάση της διαμόρφωσης που χρησιμοποιείται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες.

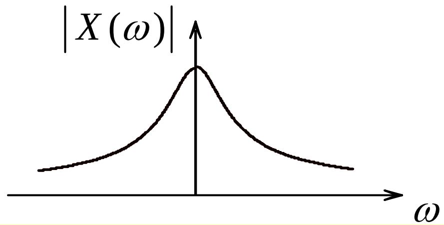


$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

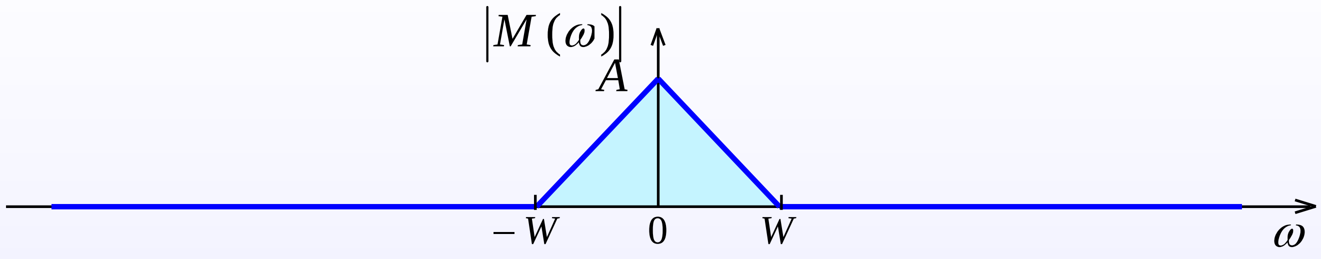




$$x(t)=e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$$



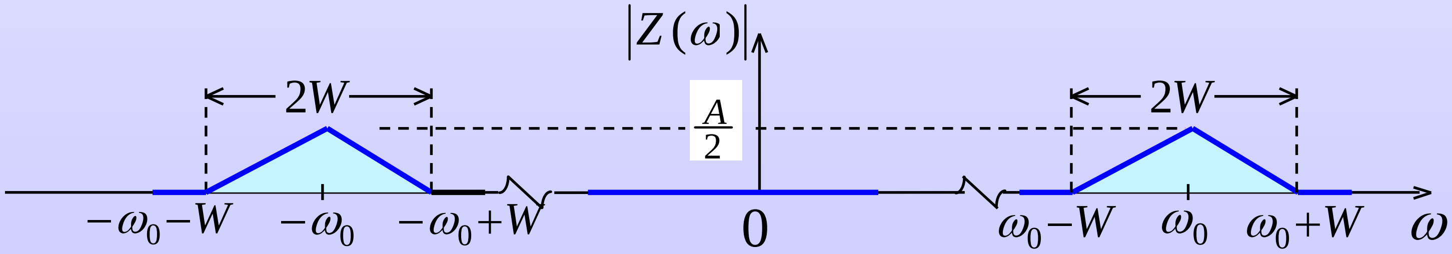
Εφαρμογή: Αν το σήμα μηνύματος $m(t)$ έχει φάσμα $M(\omega)$ το μέτρο του οποίου είναι



Το φάσμα του μηνύματος για ένα αυθαίρετο σήμα $m(t)$.

Να βρεθεί το φάσμα του σήματος $z(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$

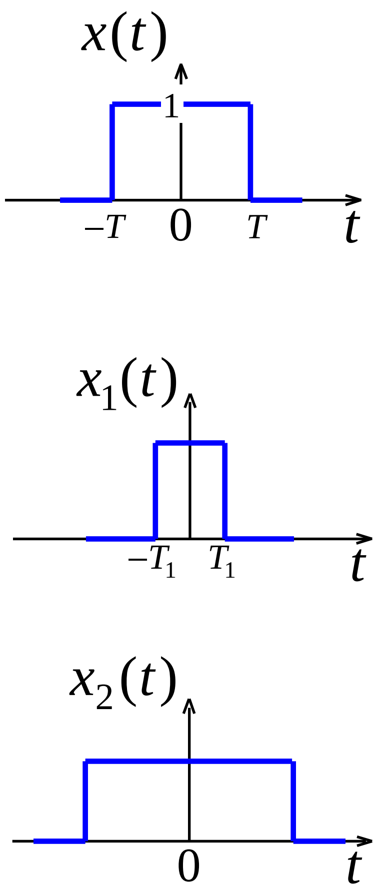
$$F\{z(t)\} = \tfrac{1}{2}\left[M(\omega-\omega_0)+M(\omega+\omega_0)\right]$$

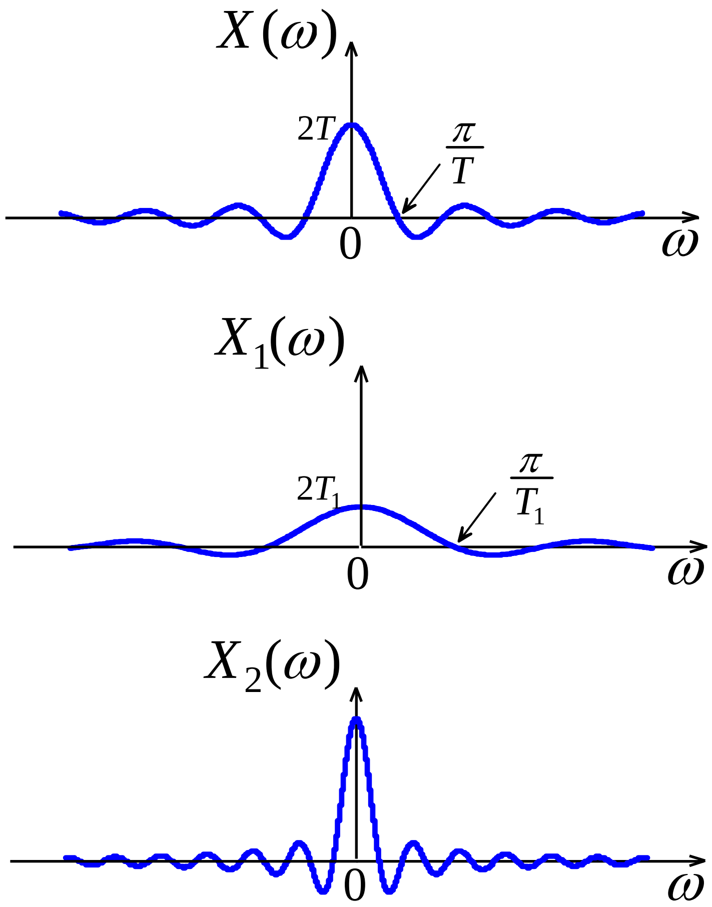


Το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος.

Αλλαγή κλίμακας στο χρόνο και τη συχνότητα - Ανάκλαση

$$x(at) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{και} \quad \frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} X(a\omega)$$





Ανάκλασης

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$$

Θεώρημα της Συνέλιξης

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{F} Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$$

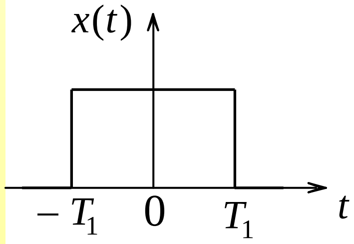
Υπολογίζεται εύκολα το φάσμα του σήματος εξόδου $Y(\omega)$ ενός ΓΧΑ συστήματος αν γνωρίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου $X(\omega)$ και την απόκριση συχνότητας $H(\omega)$.

Θεώρημα του Parseval

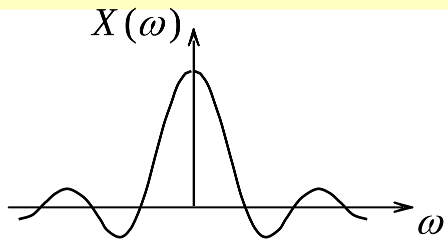
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

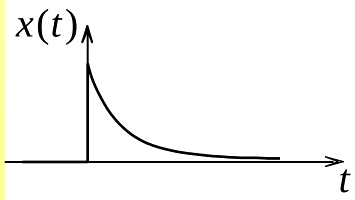
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Η ποσότητα $|X(\omega)|^2$ εκφράζει την κατανομή ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας και ονομάζεται ***φασματική πυκνότητα ενέργειας*** του σήματος $x(t)$.

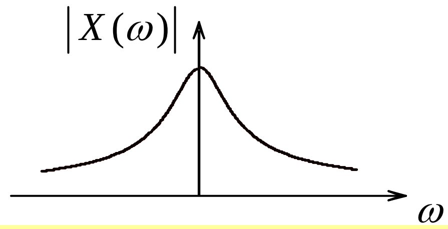


$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$





$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$



Παραγώγιση

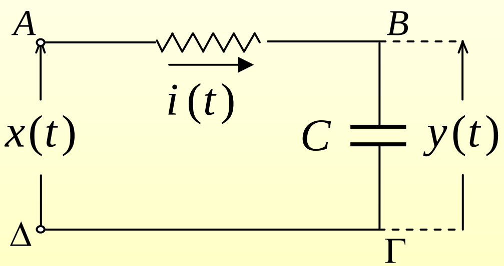
α) στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\;F\;} j\omega X(\omega)$$

β) στο πεδίο συχνότητας

$$-jt\,x(t) \xleftrightarrow{\;F\;} \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$



$$RC\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Για σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ έχουμε $y(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ και $\dfrac{dy(t)}{dt} = j\omega_0\, H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$

$$RC\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad RC\;j\omega_0 H(\omega_0)e^{j\omega_0} + H(\omega_0)e^{j\omega_0} = e^{j\omega_0} \quad \Rightarrow$$

$$RC\;j\omega_0 H(\omega_0) + H(\omega_0) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\,RC\omega}$$

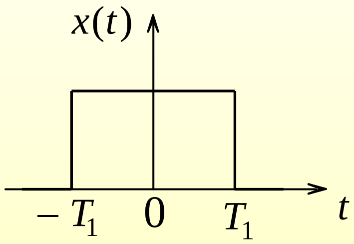
Παραγώγιση

α) στο πεδίο του χρόνου

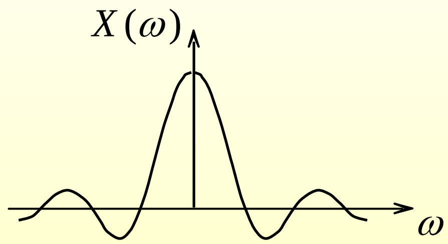
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

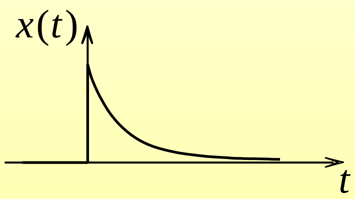
β) στο πεδίο συχνότητας

$$-jt\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

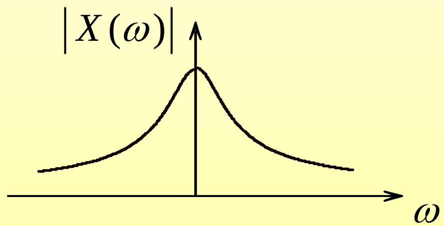


$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$





$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$



$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = 1$$

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2}{j\omega}, \ \omega \neq 0$$

- **Ολοκλήρωση**

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(\omega)\delta(\omega)$$

- **Συμμετρίες για πραγματικά σήματα**

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

$$\Re e\{X(-\omega)\} = \Re e\{X(\omega)\}$$

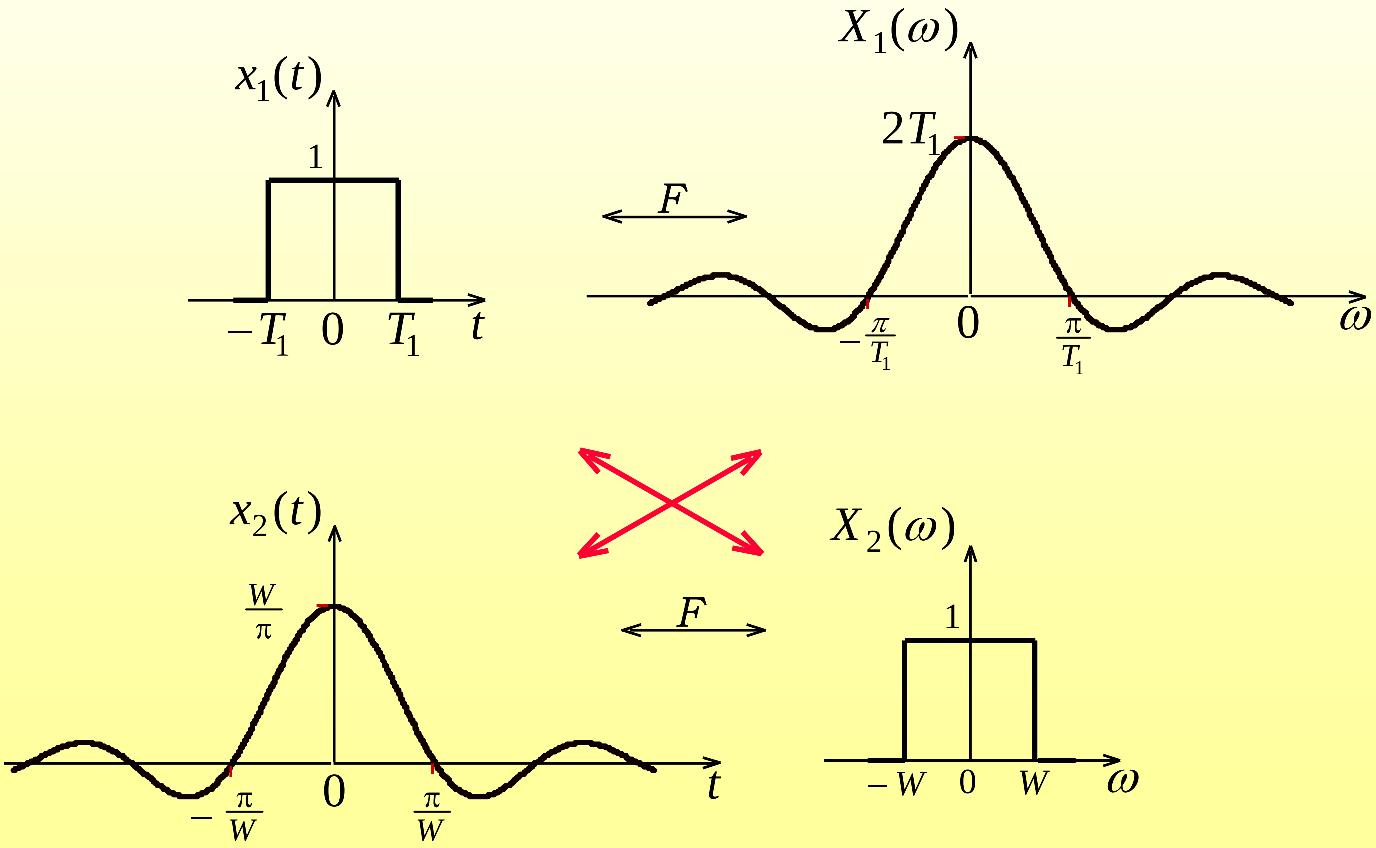
$$\Im m\{X(-\omega)\} = -\Im m\{X(\omega)\}$$

Δυϊσμός

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

Το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier:

$$Y(\omega) = 2\pi\, x(-\omega)$$



Δυϊσμός

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

Το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier:

$$Y(\omega) = 2\pi\, x(-\omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = 1$$

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{F} X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) = \delta(f)$$

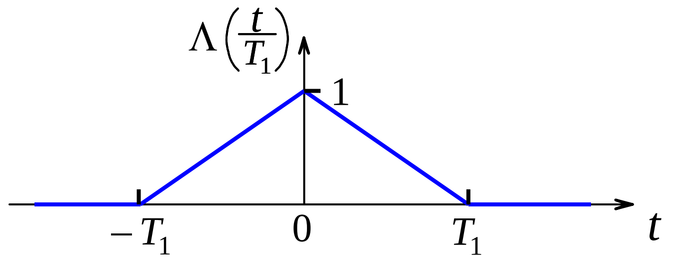
$$x(t) = u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \frac{2}{t^2 + 1} \xleftrightarrow{F} Y(\omega) = 2\pi\, e^{-|\omega|}$$

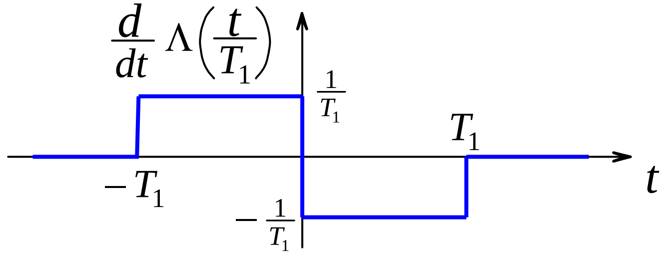
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του τριγωνικού παλμού διάρκειας $2T_1$.

$$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_1}, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



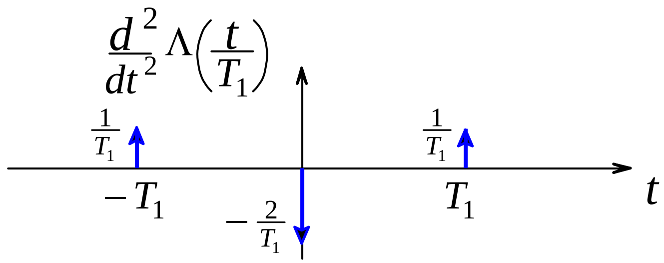
Ο τριγωνικός παλμός διάρκειας $2T_1$.

$$\frac{d}{dt}\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \frac{1}{T_1}u(t+T_1) - \frac{2}{T_1}u(t) + \frac{1}{T_1}u(t-T_1)$$



Η πρώτη παράγωγος του τριγω-νικού παλμού διάρκειας $2T_1$.

$$\frac{d^2}{dt^2}\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \frac{1}{T_1}\delta(t+T_1) - \frac{2}{T_1}\delta(t) + \frac{1}{T_1}\delta(t-T_1)$$



$$F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right)\right\} = T_1 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)$$

Η δεύτερη παράγωγος του τριγω-νικού παλμού διάρκειας $2T_1$.

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

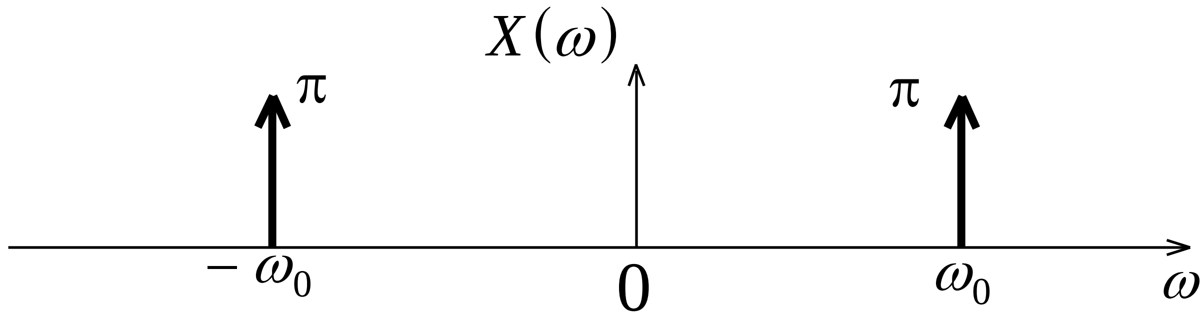
Το σήμα $x(t)$ γράφεται και ως

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

$$1 \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega) \quad \overset{e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)}{\Rightarrow} \quad e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

επομένως ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι

$$F\{x(t)\} = F\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$



Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)\, u(t)$$

Το σήμα $x(t)$ γράφεται και ως

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

$$u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega) \quad \overset{e^{j\omega_0 t} x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega-\omega_0)}{\Longrightarrow} \quad e^{j\omega_0 t} u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

επομένως ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι

$$F\{x(t)\} = F\{\cos(\omega_0 t)\, u(t)\} = \underbrace{\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]}_{\text{Διακριτό τμήμα του φάσματος}} + \underbrace{\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}_{\text{Συνεχές τμήμα του φάσματος}}$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

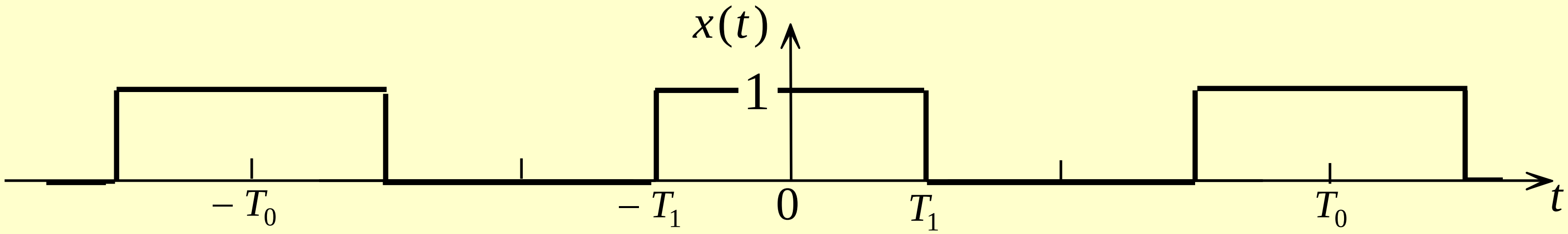
Όπως γνωρίζουμε ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega) \quad \overset{e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)}{\Rightarrow} \quad e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

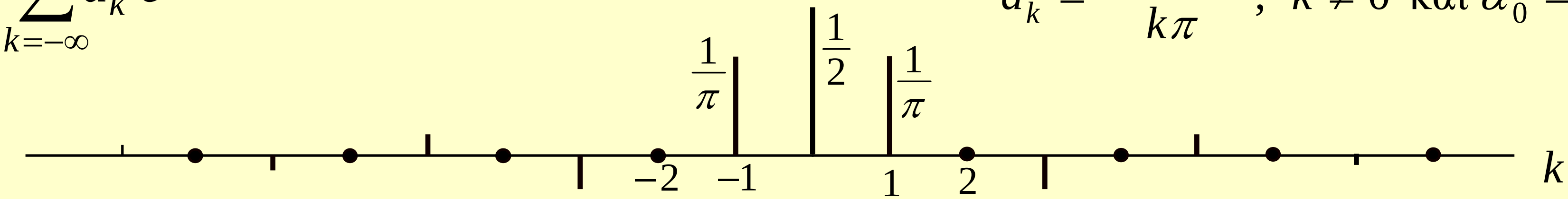
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται και στα περιοδικά σήματα.

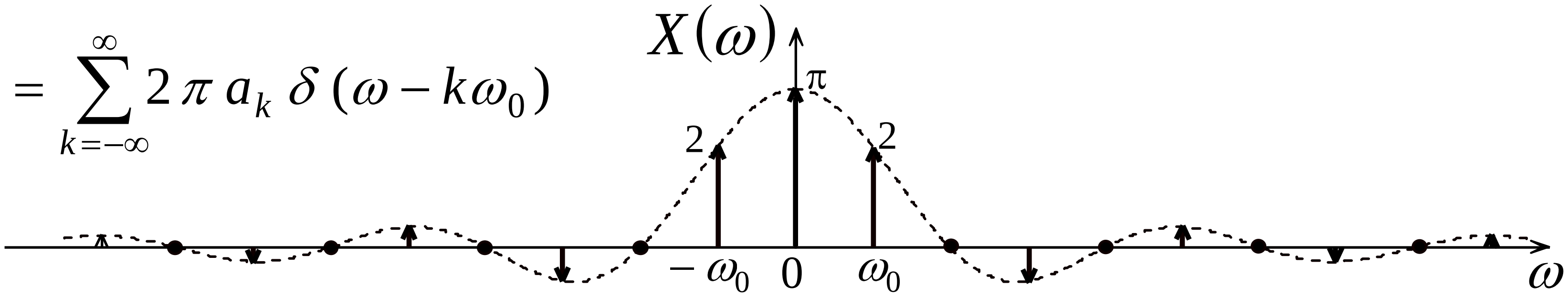


$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi},\quad k\neq 0 \ \text{και}\ \alpha_0=\frac{1}{2}$$



$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(\omega-k\omega_0)$$



Ο μετασχηματισμός Fourier για το περιοδικό ορθογώνιο κύμα

Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T_0 αποτελείται **από συναρτήσεις δέλτα** ομοιόμορφα κατανεμημένες σε απόσταση $\omega_0 = 2\pi / T_0$ **με πλάτος 2π φορές** το αντίστοιχο πλάτος του συντελεστή της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος.

Συναρτήσεις Συσχέτισης

Για ένα σήμα ενέργειας ορίζεται η συνάρτηση ***αυτοσυσχέτισης***

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) x^*(t)\, dt$$

Για ένα σήμα ισχύος ορίζεται η ***μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης***

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ εξαρτάται από το πλάτος του σήματος $x(t)$. Ορίζεται ***ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης*** ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το πλάτος του σήματος.

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{E_x}$$

Ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

Η ενέργεια, E_x, σήματος, $x(t)$, είναι ίση με τη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του σήματος, $R_x(\tau)$, για $\tau = 0$.

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \quad \xrightarrow{\tau = 0} \quad R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = E_x$$

Ο ΜF της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ισούται με τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος.

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) \quad \Longrightarrow \quad F\left[R_x(\tau)\right] = \left|X(\omega)\right|^2$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) \quad R_h(\tau)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$R_x(\tau) \longrightarrow \boxed{h(t) \quad R_h(\tau)} \longrightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

$$\left|X(\omega)\right|^2 \longrightarrow \boxed{h(t) \quad R_h(\tau)} \longrightarrow \left|Y(\omega)\right|^2 = \left|X(\omega)\right|^2 \cdot \left|H(\omega)\right|^2$$

Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων εισόδου-εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου ΓΧΑ συστήματος ισούται με τη συνέλιξη της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της εισόδου με τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της κρουστικής απόκρισης του συστήματος

Ιδιότητες της μέσης χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

Η μέση ισχύς, P_x σήματος $x(t)$ είναι ίση με τη μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $\mathcal{R}_x(\tau)$, για $\tau = 0$.

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \quad \xrightarrow{\tau = 0} \quad \mathcal{R}_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\, x(t)\,|^2 dt \;= P_x$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της μέσης χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, ισούται με τη ***φασματική πυκνότητα ισχύος*** του σήματος.

$$F[\mathcal{R}_x(\tau)] = S_x(\omega)$$

Η συνάρτηση $S_x(\omega)$ περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς του σήματος στο χώρο των συχνοτήτων.

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \mathcal{R}_x(\tau) \\ S_x(\omega) \end{array} \longrightarrow \boxed{h(t) \;\; \mathcal{R}_h(\tau)} \longrightarrow \begin{array}{l} y(t) = x(t) * h(t) \\ \mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \\ S_y(\omega) = S_x(\omega)\,|\,H(\omega)|^2 \end{array}$$

Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων εισόδου-εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος.

Αρχή λειτουργίας Radar

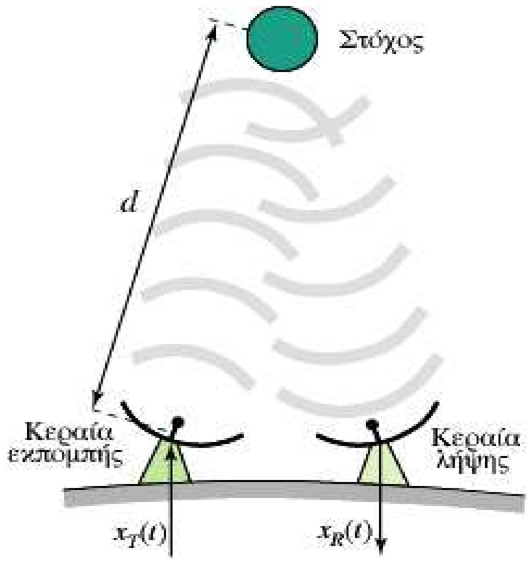
Με τη βοήθεια ενός radar είναι δυνατή η μέτρηση της απόστασης στην οποία βρίσκεται ένας στόχος (π.χ. αεροπλάνο).

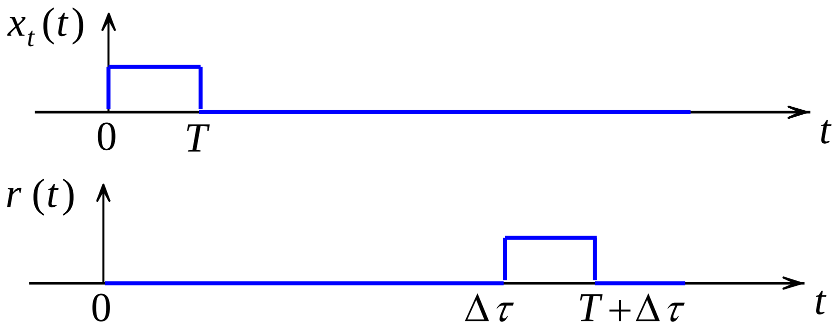
Το σήμα εκπομπής αποτελείται από ορθογώνιους παλμούς διάρκειας T, οι οποίοι επαναλαμβάνονται με περίοδο T_0.

Υποθέτουμε ότι ο στόχος βρίσκεται σε απόσταση d. Το χρονικό διάστημα $\Delta\tau$ από τη στιγμή εκπομπής του παλμού μέχρι τη στιγμή που φτάνει η ηχώ του στόχου είναι

$$\Delta\tau = \frac{2d}{c}$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός.



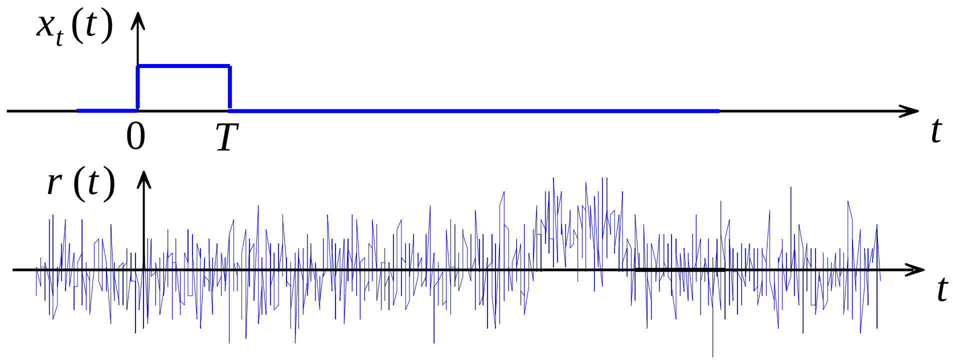


Ο παλμός εκπομπής $x_t(t)$, και ο παλμός λήψης $r(t)$, σε ένα ιδανικό σύστημα Radar.

Η διάταξη προσδιορίζει το χρονικό διάστημα $\Delta\tau$, και στη συνέχεια προσδιορίζει την απόσταση d.

$$d = \frac{c \cdot \Delta\tau}{2}$$

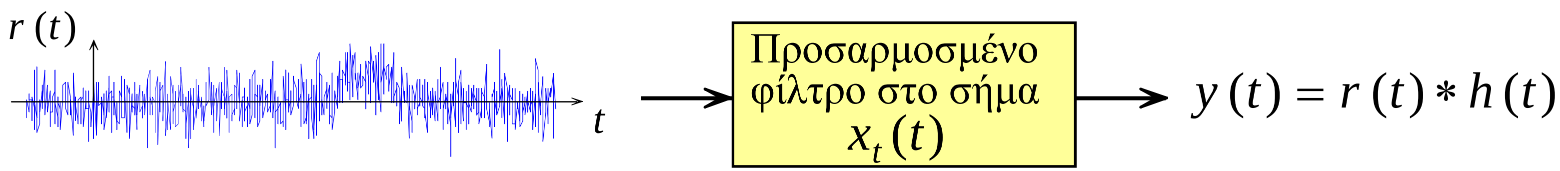
Η ηχώ του σήματος εκπομπής από το στόχο διαβρώνεται από θόρυβο. Επομένως ο προσδιορισμός του $\Delta\tau$ πρακτικά είναι αδύνατο να προσδιορισθεί απευθείας από το σήμα εκπομπής και από την ηχώ του.



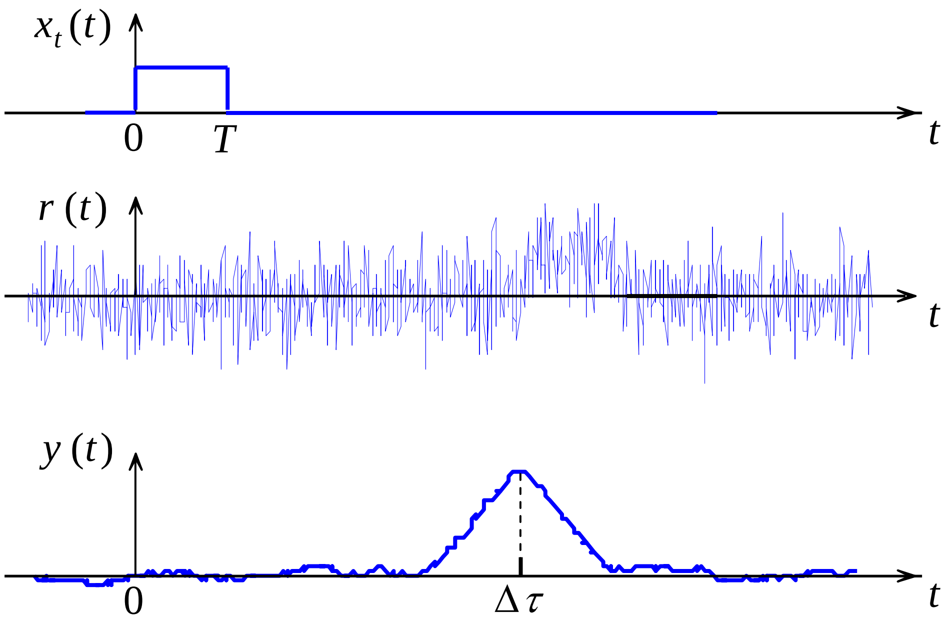
Ο παλμός εκπομπής $x_t(t)$, και ο παλμός λήψης $r(t)$, σε ένα πραγματικό σύστημα Radar.

Το σήμα ηχούς, $r(t)$ εφαρμόζεται στη είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος το οποίο ονομάζεται ***προσαρμοσμένο φίλτρο*** (*matched filter*). Η κρουστική απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι η ανάκλαση του σήματος εκπομπής $x_t(t)$, δηλαδή,

$$h(t) = x_t(-t)$$



Η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου $y(t)$, είναι η συνέλιξη του σήματος ηχούς $r(t)$, με την κρουστική απόκριση $h(t)$, δηλαδή, $y(t) = r(t) * h(t)$.

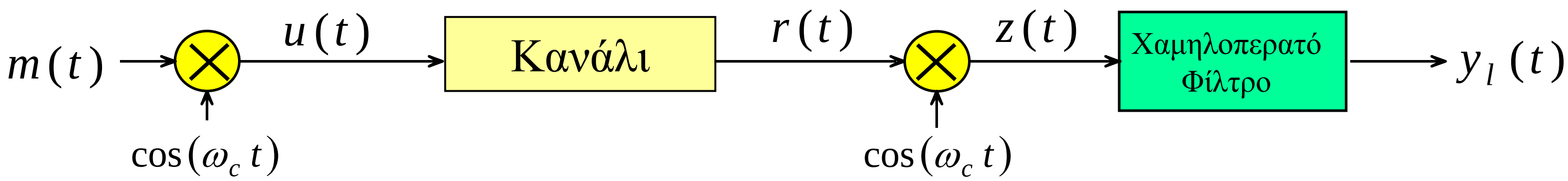


Ο παλμός εκπομπής $x_t(t)$, και ο παλμός λήψης $r(t)$, και η έξοδος του προσαρμοσμένου σήματος $y(t)$, σε ένα πραγματικό σύστημα Radar.

Το χρονικό διάστημα $\Delta\tau$ είναι ίσο με τη χρονική στιγμή κατά την οποία η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου αποκτά τη μέγιστη τιμή της.

Η διαμόρφωση και η αποδιαμόρφωση στη μετάδοση σήματος.

Η διαμόρφωση χρησιμοποιεί το σήμα πληροφορίας $m(t)$ για να μεταβάλλει το πλάτος ενός ημιτονοειδούς φέροντος $\cos(\omega_c t)$.



(α) Διαμορφωτής *(β) Σύγχρονη (ή σύμφωνη) αποδιαμόρφωση*

Το διαμορφωμένο σήμα είναι

$$u(t) = m(t)\cos(\omega_c t)$$

Το λαμβανόμενο σήμα απουσία θορύβου μέσω ιδανικού καναλιού είναι

$$r(t) = u(t) = m(t)\cos(\omega_c t)$$

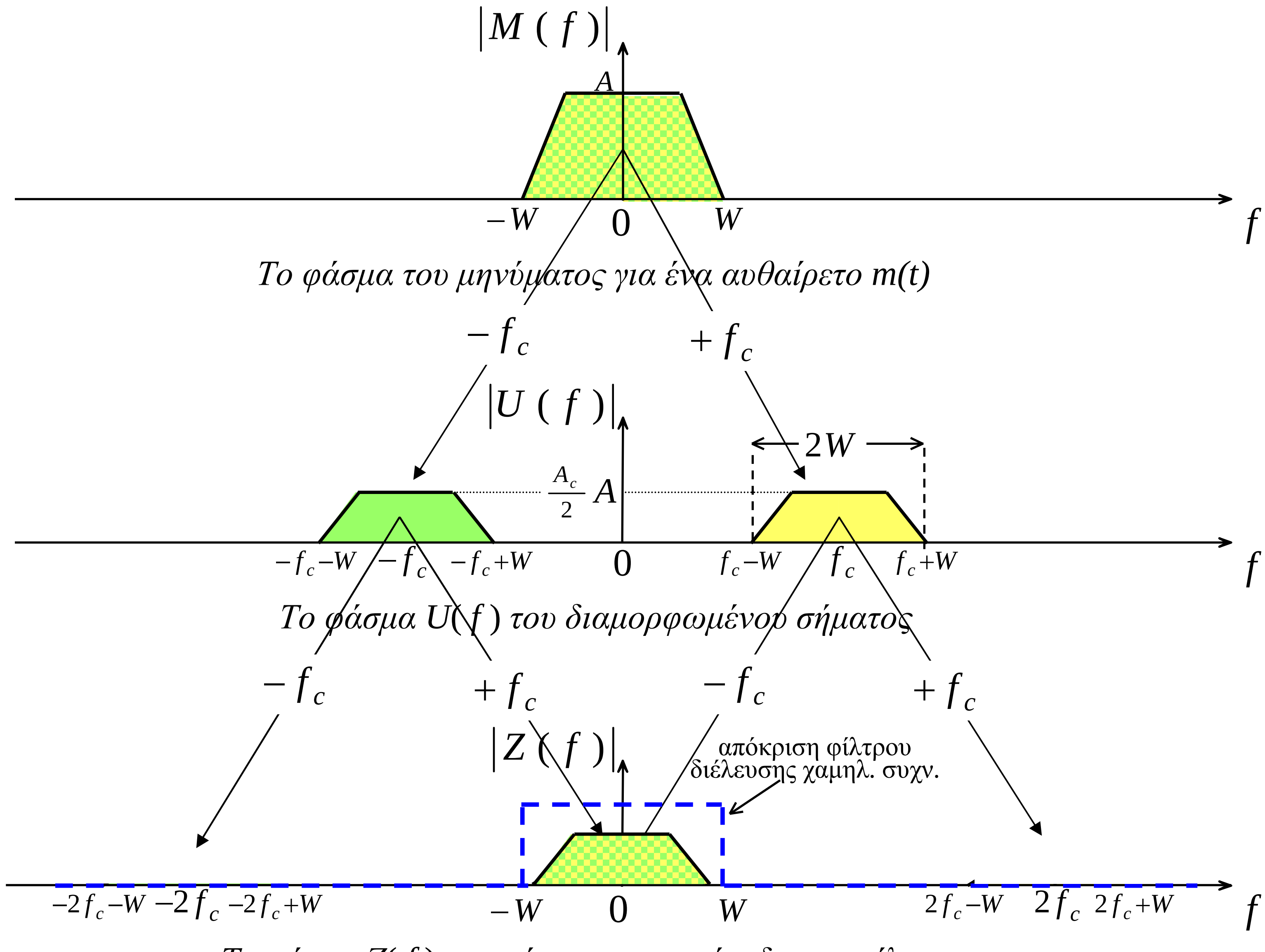
Το αποδιαμορφωμένο σήμα είναι

$$z(t) = r(t)\cos(\omega_c t) = m(t)\cos(\omega_c t)\cdot\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}m(t)\cos(2\omega_c t)$$

Το σήμα αυτό διέρχεται μέσα από ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με εύρος-ζώνης W. Η έξοδος του φίλτρου είναι

$$y_l(t) = \frac{1}{2}m(t)$$

Μελέτη της διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης στο πεδίο συχνότητας



Το φάσμα Z(f) του σήματος στην είσοδο του φίλτρου

Πολυπλεξία Σημάτων

Η διαδικασία της διαμόρφωσης μας δίδει τη δυνατότητα να διευθετήσουμε τη μετάδοση πολλών μηνυμάτων από διαφορετικούς χρήστες μέσα από το ίδιο φυσικό κανάλι

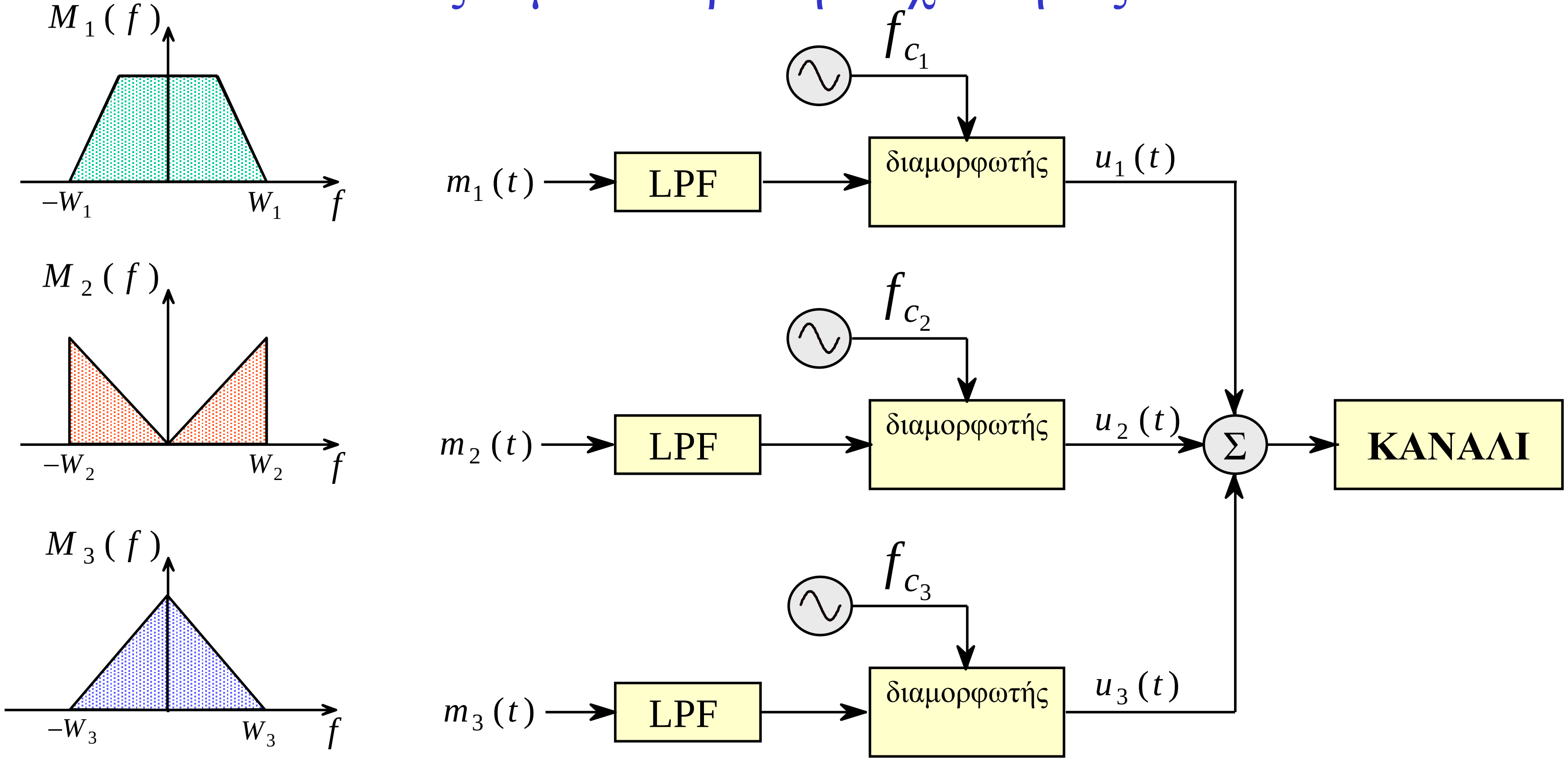
Στη ραδιοφωνία και στην τηλεοπτική εκπομπή ο πομπός μεταφέρει το φάσμα του σήματος πληροφορίας που πρόκειται να εκπέμψει στην κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων για να μη παρεμβάλλεται με κάποιον άλλον.

Η διαδικασία κατά την οποία συνδυάζουμε έναν αριθμό ξεχωριστών σημάτων μηνύματος σε σύνθετο σήμα για να τα μεταδώσουμε μέσα από ένα κοινό κανάλι καλείται **πολυπλεξία**.

Υπάρχουν δύο βασικές τεχνικές πολυπλεξίας

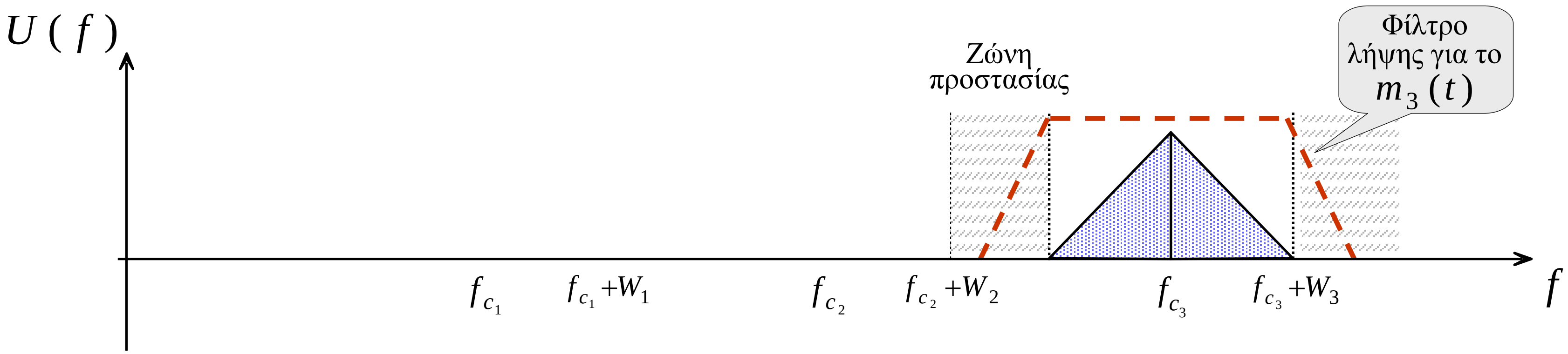
- ***Η πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας*** *(FDM Frequency Division Multiplexing)*
- ***Η πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου*** *(TDM Time Division Multiplexing)*

Πολυπλεξία με Διαίρεση Συχνότητας



Πομπός FDM. Παράδειγμα πολυπλεξίας τριών σημάτων με διαίρεση συχνότητας

Μια τυπική διάταξη συστήματος FDM φαίνεται στο Σχήμα. Το σχήμα αυτό δείχνει την πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας στον πομπό 3 σημάτων μηνύματος. Τα χαμηλοπερατά φίλτρα στον πομπό χρησιμοποιούνται για να είναι βέβαιο ότι το εύρος-ζώνης των σημάτων μηνύματος περιορίζεται σε W Hz. Κάθε σήμα διαμορφώνει ένα ξεχωριστό φέρον και επομένως απαιτούνται 3 διαμορφωτές. Στη συνέχεια τα σήματα από τους 3 διαμορφωτές προστίθενται και μεταδίδονται μέσα από το κανάλι.



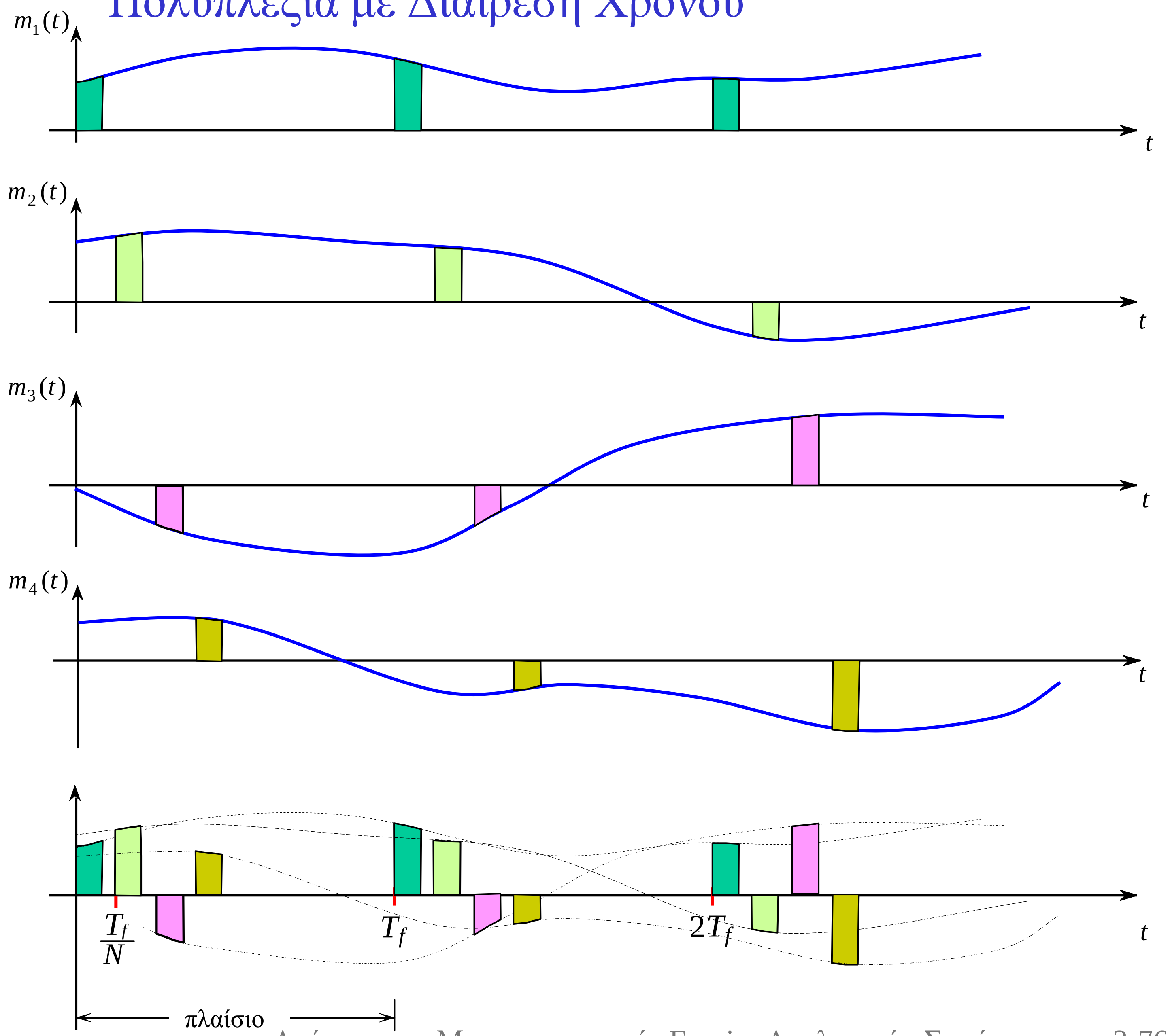
Φάσμα του πολυπλεγμένου σήματος

Για τον περιορισμό της πιθανότητας φασματικής επικάλυψης, τα διαμορφωμένα φάσματα διαχωρίζονται μεταξύ τους κατά συχνότητα με ***ζώνες προστασίας*****.**

Πολυπλεξία με Διαίρεση Χρόνου

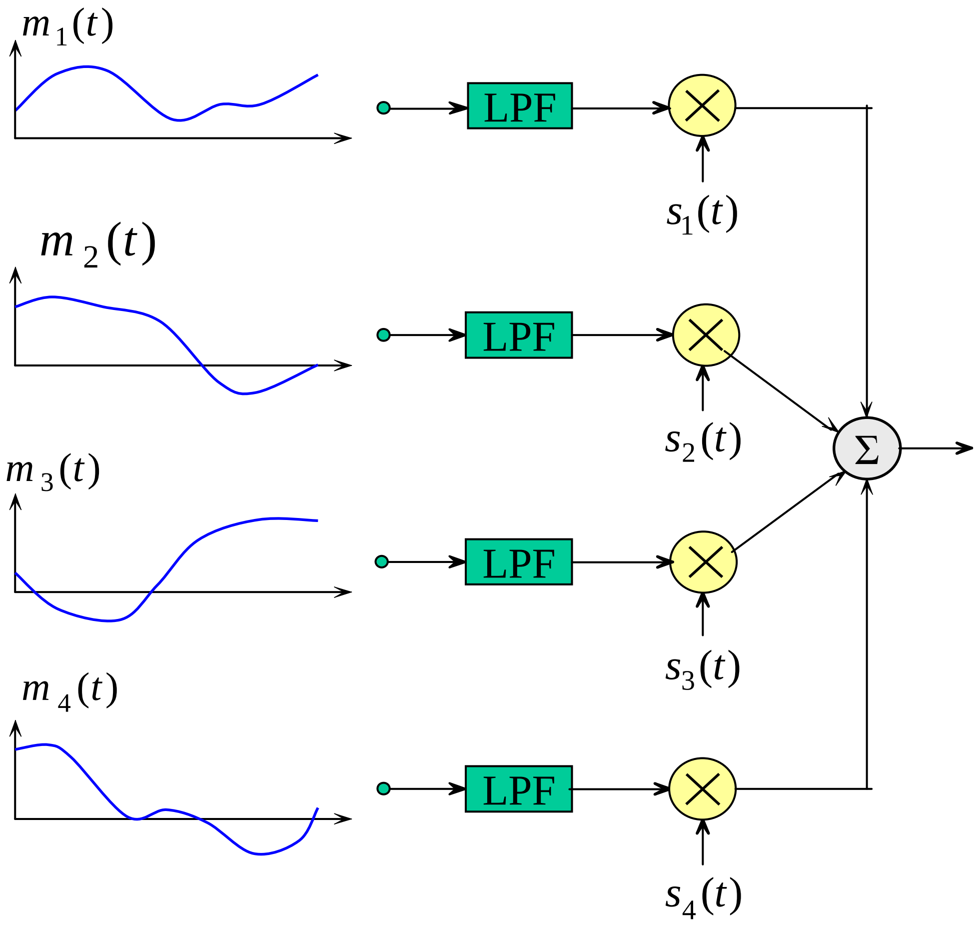
Η πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου χρησιμοποιείται συνήθως κατά τη διαβίβαση ψηφιακής πληροφορίας.

N σήματα, που είναι όλα περιορισμένου εύρους-ζώνης μέχρι $B \leq 3400$Hz λόγω των χαμηλοπερατών φίλτρων εισόδου (LPF), δειγματοληπτούνται στον πομπό το ένα μετά το άλλο

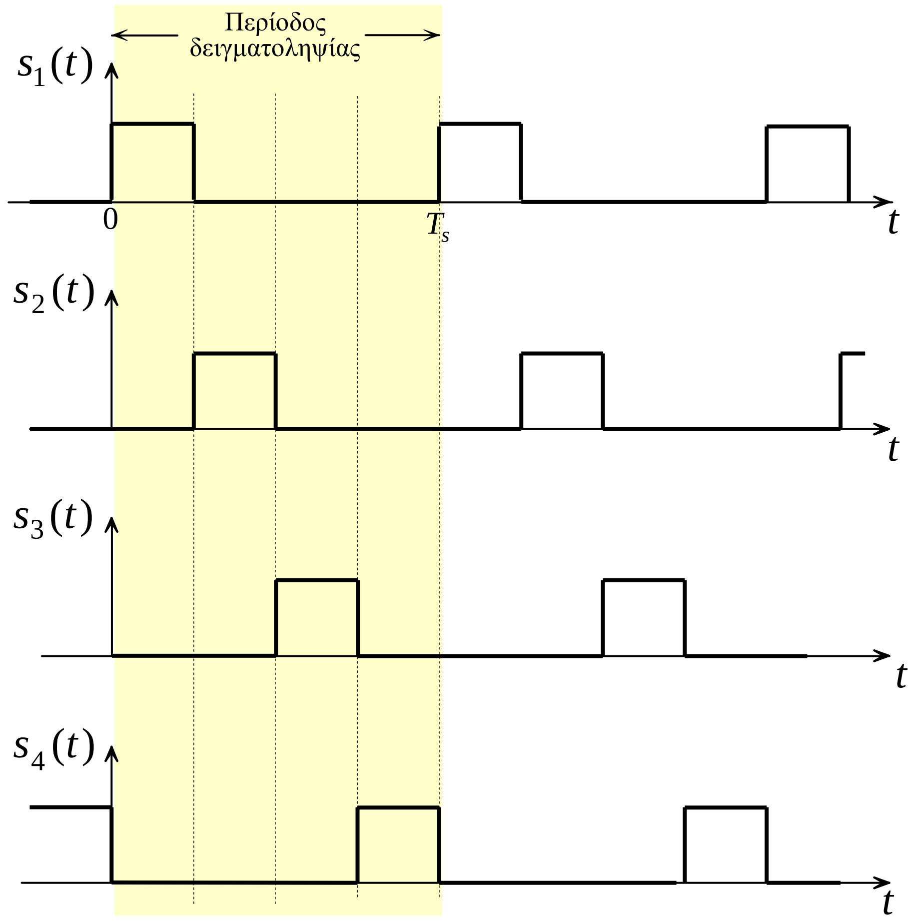


Κυματομορφή TDM με τέσσερα κανάλια

Πολυπλεξία με Διαίρεση Χρόνου



Μεταγωγή Καταμερισμού Χρόνου



Κυματομορφές ελέγχου μεταγωγής