2. ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Γενικά τι είναι σύστημα - ***Ορισμός***.

- Τρόποι σύνδεσης συστημάτων.

- Κατηγορίες των συστημάτων ανάλογα με τον αριθμό και το είδος των επιτρεπομένων εισόδων και εξόδων.

- Ιδιότητες των συστημάτων, όπως ***γραμμικό σύστημα, αιτιάτο σύστημα, αντιστρέψιμο σύστημα, ευστάθες σύστημα, στατικό - δυναμικό σύστημα*** και ***σύστημα χρονικά αναλλοίωτο***.

- Μεγέθη τα οποία περιγράφουν τη συμπεριφορά των συστημάτων, όπως ***η κρουστική απόκριση***, ***η συνάρτηση μεταφοράς*** *και* ***η απόκριση συχνότητας***. Φυσική σημασία των παραπάνω μεγεθών.

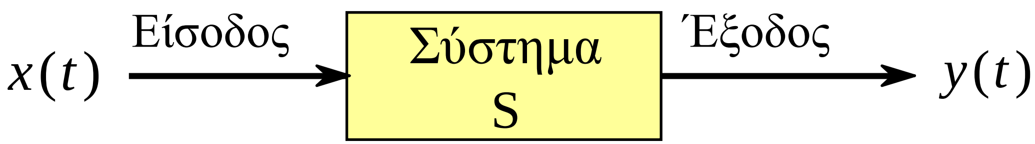
- Προσδιοσμός της εξόδου ενός συστήματος, όταν είναι γνωστή η είσοδο και η κρουστική απόκρισή του.

- Μελέτη απλών ηλεκτρονικών και μηχανικών συστημάτων.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ως ***σύστημα*** ορίζουμε την οντότητα εκείνη η οποία επενεργώντας σε ένα σήμα $x(t)$ έχει σαν αποτέλεσμα ένα άλλο σήμα $y(t)$.

Η δράση ενός συστήματος περιγράφεται σχηματικά



Σχηματική περιγραφή του συστήματος S.

$x(t)$ είναι το σήμα εισόδου ή απλά η ***είσοδος*** του συστήματος και $y(t)$ η ***έξοδος*** του συστήματος.

Ένα σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός μεταξύ σημάτων

$$y(t) = S\{x(t)\}$$

Με άλλα λόγια η λειτουργία ενός συστήματος παριστάνεται γραφικά εκφράζοντας το σήμα εξόδου ως συνάρτηση του σήματος εισόδου. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** όταν εκφράζεται στο πεδίο του χρόνου, ενώ όταν ορίζεται στο πεδίο συχνοτήτων ως ***συνάρτηση μεταφοράς***.

Ο παραπάνω ορισμός είναι γενικός και μπορεί να περιγράψει πολλά φυσικά συστήματα όπως

- Ηλεκτρικά κυκλώματα.
- Μηχανικά συστήματα (η κίνηση ενός κινητού, ενός ρομποτικού βραχίονα).
- Ένα επικοινωνιακό κανάλι.
- Υπολογιστές.

Ανάλογα με τον αριθμό και το είδος και τη φύση των επιτρεπομένων εισόδων-εξόδων τα συστήματα διακρίνονται:

• ***Συστήματα μιας εισόδου μιας εξόδου*** (*single-input single-output SISO*). – ***Πολυκαναλικά συστήματα*** (*single-input multi-output SIMO, MISO και MIMO*).
• ***Συστήματα συνεχούς χρόνου*** ή ***αναλογικά συστήματα*** - ***Συστήματα διακριτού χρόνου***.

Ηλεκτρικά κυκλώματα Ηλεκτρικά στοιχεία

Τα ***ηλεκτρικά κυκλώματα*** αποτελούνται από ηλεκτρικά στοιχεία, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σχηματίζουν τη δομή εκείνη, η οποία υλοποιεί μία συγκεκριμένη επεξεργασία πάνω στα σήματα εισόδου (διέγερση) για να παραχθούν τα σήματα εξόδου (αποκρίσεις).

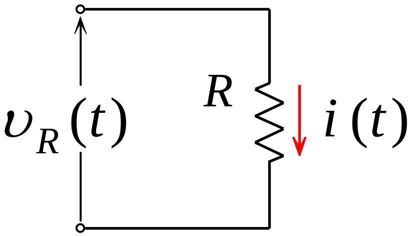
Ηλεκτρικό στοιχείο κάθε φυσικό στοιχείο το οποίο έχει την ιδιότητα να καταναλώνει, να αποθηκεύει ή να προσφέρει ηλεκτρική ενέργεια.

Τα ηλεκτρικά στοιχεία διακρίνονται σε παθητικά και ενεργά. Ως ***παθητικά*** θεωρούνται τα στοιχεία που όταν διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα καταναλώνουν ή αποθηκεύουν ενέργεια. Ως ***ενεργά*** θεωρούνται εκείνα που προσφέρουν ενέργεια, δηλαδή λειτουργούν ως πηγές ηλεκτρικής ενέργειας.

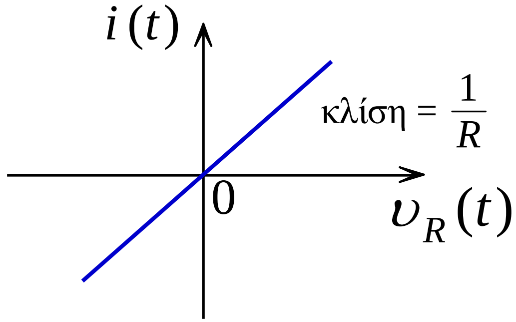
Τα βασικά παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία είναι η αντίσταση, η αυτεπαγωγή και η χωρητικότητα, ενώ τα βασικά ενεργά ηλεκτρικά στοιχεία είναι οι πηγές τάσης και η πηγές έντασης ρεύματος.

Αντίσταση

Το πιο απλό ηλεκτρικό στοιχείο είναι η ***ηλεκτρική αντίσταση*** ή απλά ***αντίσταση.*** Σε μία αντίσταση για κάθε χρονική στιγμή t η διαφορά δυναμικού (αιτία) $\upsilon_R(t)$ που εφαρμόζεται στους ακροδέκτες της και η ένταση του ρεύματος που τη διαρρέει (αποτέλεσμα) $i(t)$, ικανοποιούν τον ***νόμο του Ohm***.



$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot \upsilon_R(t)$$



Χαρακτηριστική τάσης ρεύματος

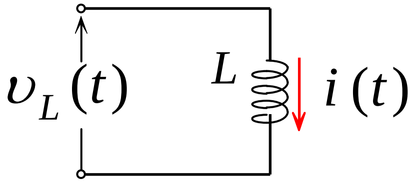
Η σταθερά R ονομάζεται ***αντίσταση*** μετριέται σε Ohm (Ω) και το αντίστροφό της $G = 1/R$ είναι η ***αγωγιμότητα*** και μετριέται σε Siemens.

Οι αντιστάσεις μετατρέπουν την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα *φαινόμενο Joule.* Οι αντιστάσεις είναι ***παθητικά στοιχεία***, διότι όταν διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα καταναλώνουν ισχύ. Η καταναλισκόμενη στιγμιαία ισχύς είναι

$$P_R(t) = i(t) \cdot \upsilon_R(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{\upsilon_R^2(t)}{R}$$

Το πηνίο

Σε ένα πηνίο η διαφορά δυναμικού $\upsilon_L(t)$ (στιγμιαία) που δημιουργείται στα άκρα του είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει.



$$\upsilon_L(t) = L \cdot \frac{d\, i(t)}{dt}$$

όπου L είναι ο ***συντελεστής αυτεπαγωγής*** και μετριέται σε Henry (H).

Τα πηνία έχουν την ικανότητα να αποθηκεύουν ενέργεια υπό μορφή μαγνητικής ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο πηνίο. Η στιγμιαία ισχύς είναι

$$P_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{d\, i^2(t)}{dt}$$

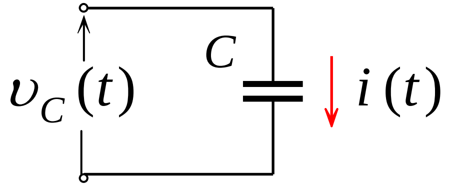
Η σχέση που συνδέει το στιγμιαίο ρεύμα συναρτήσει της στιγμιαίας τάσης στο πηνίο είναι

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} \upsilon(\xi)\, d\xi \quad = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} \upsilon(\xi)\, d\xi + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} \upsilon(\xi)\, d\xi \quad = i(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} \upsilon(\xi)\, d\xi$$

όπου $i(0^-)$ είναι η αρχική τιμή ($t = 0$) του ρεύματος του πηνίου (***αρχική συνθήκη***).

Ο πυκνωτής

Σε ένα πυκνωτή η ένταση του ρεύματος $i(t)$ (στιγμιαία) που διαρρέει είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της τάσης που εμφανίζεται στα άκρα του $\upsilon_C(t)$.



$$i(t) = C \cdot \frac{d\,\upsilon_C(t)}{dt}$$

όπου C είναι η χωρητικότητα του και μετριέται σε Farad (F), και ισούται με το λόγο του φορτίου Q_C του πυκνωτή προς την τάση του V_C

$$C = \frac{Q_C}{V_C}$$

Οι πυκνωτές έχουν την ικανότητα να αποθηκεύουν ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρικής ενέργειας στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του. Η στιγμιαία ισχύς είναι

$$P_C(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{d\,\upsilon_C^2(t)}{dt}$$

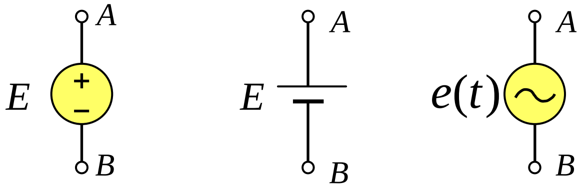
Η σχέση που συνδέει τη τάση του πυκνωτή σε συνάρτηση με την ένταση ρεύματος είναι

$$\upsilon_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,d\xi \;= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\xi)\,d\xi + i\int_{0}^{t} i(t)\,dt \;= \upsilon_C(0^-) + \int_{0}^{t} i(\xi)\,d\xi$$

όπου $\upsilon_C(0^-)$ είναι η αρχική τιμή ($t = 0$) της τάσης του πυκνωτή (***αρχική συνθήκη***).

Πηγή τάσης

Ιδανική πηγή τάσης θεωρείται μία πηγή ηλεκτρικής ενέργειας που εμφανίζει σταθερή τιμή τάσης στα άκρα της, ανεξάρτητα από την ένταση του ρεύματος που την διαρρέει όταν συνδεθεί στα άκρα οποιουδήποτε ηλεκτρικού στοιχείου ή κυκλώματος.



Συμβολισμός ηλεκτρικών πηγών τάσης

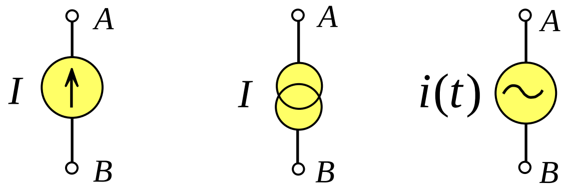
Στη πράξη η τάση στους ακροδέκτες $\upsilon_{\pi o\lambda}(t)$ εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει την πηγή

$$\upsilon_{\pi o\lambda}(t) = e(t) - r_s \cdot i(t)$$

όπου r_s είναι η εσωτερική αντίσταση της πηγής.

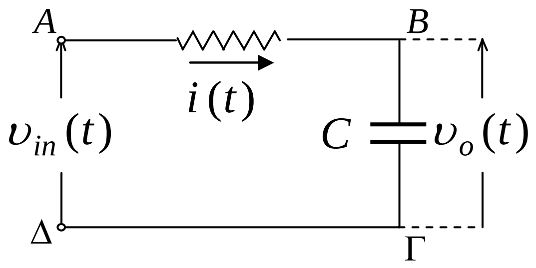
Πηγή ρεύματος

Ιδανική πηγή ρεύματος θεωρείται μία πηγή ηλεκτρικής ενέργειας που όταν συνδεθούν σε ένα οποιοδήποτε φορτίο, προκαλούν ροή ηλεκτρικού ρεύματος σταθερής έντασης.



Συμβολισμός ηλεκτρικών πηγών ρεύματος

Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου $\upsilon_{in}(t)$ και το σήμα εξόδου $\upsilon_o(t)$ ενός κυκλώματος RC συνδέονται με την εξίσωση



$$RC\frac{d\,\upsilon_0(t)}{dt}+\upsilon_0(t)=\upsilon_{in}(t)$$

Γενικά το σήμα εισόδου $x(t)$ και το σήμα εξόδου $y(t)$ ενός συστήματος συνδέονται με μία ***διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*** οι οποίοι εξαρτώνται από τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος.

Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει τη γενική μορφή

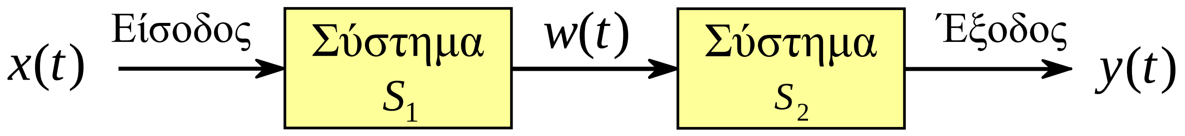
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Η ***τάξη*** του συστήματος προσδιορίζεται από τη μεγαλύτερη παράγωγο της εξόδου, η οποία εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση.

ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Η ανάλυση ενός πολύπλοκου συστήματος διευκολύνεται σημαντικά αν δούμε το σύστημα ως αποτέλεσμα διασύνδεσης λιγότερων πολύπλοκων συστημάτων.

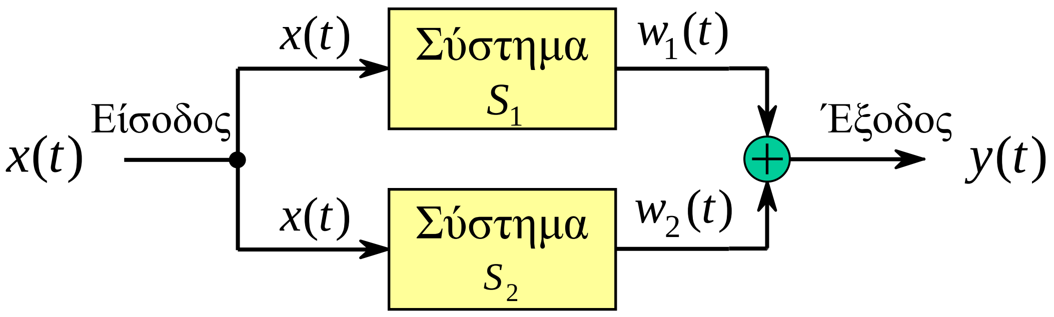
Σειριακή σύνδεση



Η σχηματική αναπαράσταση δύο συστημάτων τα οποία έχουν συνδεθεί σειριακά.

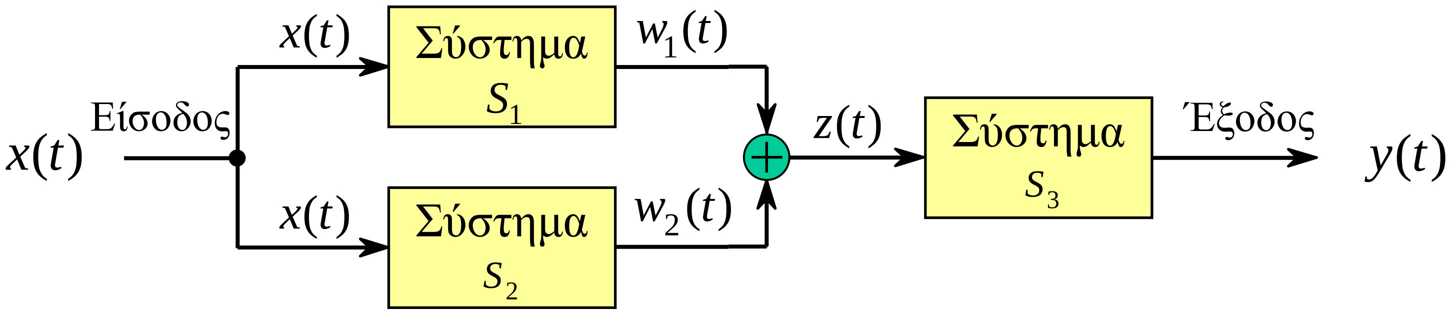
Μία σημαντική διαδικασία η οποία σχετίζεται με τη σειριακή σύνδεση είναι η ***αντιστροφή*** συστήματος.

Παράλληλη σύνδεση



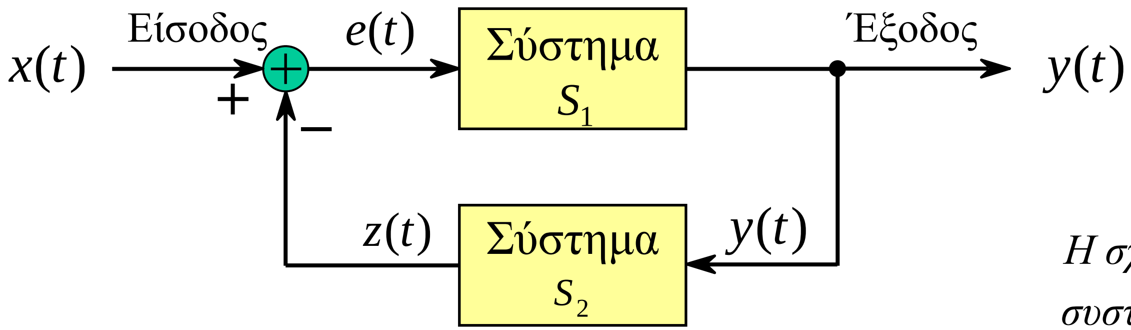
Η σχηματική αναπαράσταση δύο συστημάτων τα οποία έχουν συνδεθεί παράλληλα.

Μεικτή σύνδεση συστημάτων



Η σχηματική αναπαράσταση μεικτής σύνδεσης συστημάτων.

Σύνδεση συστημάτων με ανατροφοδότηση - ανάδραση



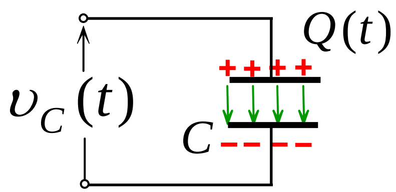
Η σχηματική αναπαράσταση σύνδεσης συστημάτων με ανατροφοδότηση.

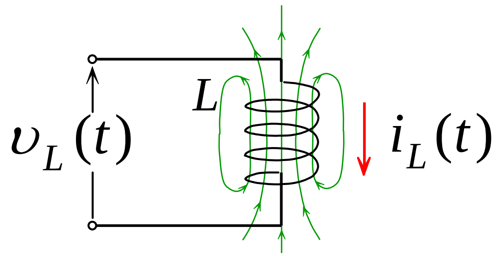
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή t_0.

Θα λέμε ότι ένα σύστημα βρίσκεται σε ***κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή*** t_0, εάν αυτό δεν έχει υποστεί διέγερση από άλλο σήμα για κάθε χρονική στιγμή $t < t_0$.

Από φυσική άποψη, ένα σύστημα που είναι σε κατάσταση ηρεμίας σε δεδομένη χρονική στιγμή t_0, σημαίνει ότι δεν είχε αποθηκευμένη ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = t_0$.





Οι πυκνωτές αποθηκεύουν ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρικής ενέργειας στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του η στιγμιαία τιμή της οποίας είναι

$$E_{\eta\lambda\epsilon\kappa}(t) = \frac{1}{2} C \cdot \upsilon_C^2(t)$$

Τα πηνία αποθηκεύουν ενέργεια υπό μορφή μαγνητικής ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο πηνίο η στιγμιαία τιμή της οποίας είναι

$$E_{\mu\alpha\gamma}(t) = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2(t)$$

Γραμμικότητα

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{Γραμμικό Σύστημα}} \longrightarrow y_1(t) = S\{x_1(t)\}$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Γραμμικό Σύστημα}} \longrightarrow y_2(t) = S\{x_2(t)\}$$

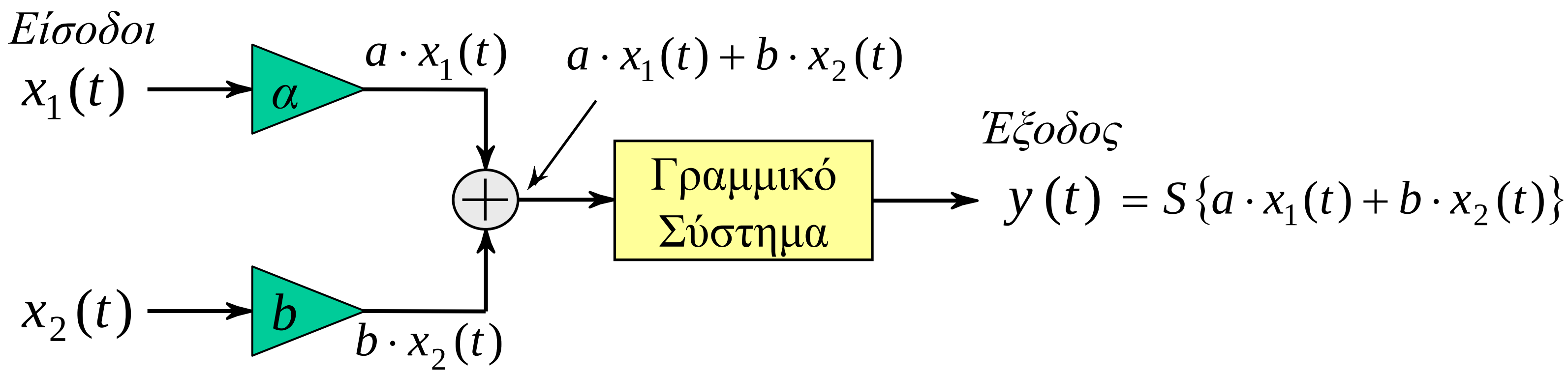
$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Γραμμικό Σύστημα}} \longrightarrow \begin{aligned} y(t) &= a \cdot S\{x_1(t)\} + b \cdot S\{x_2(t)\} \\ &= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

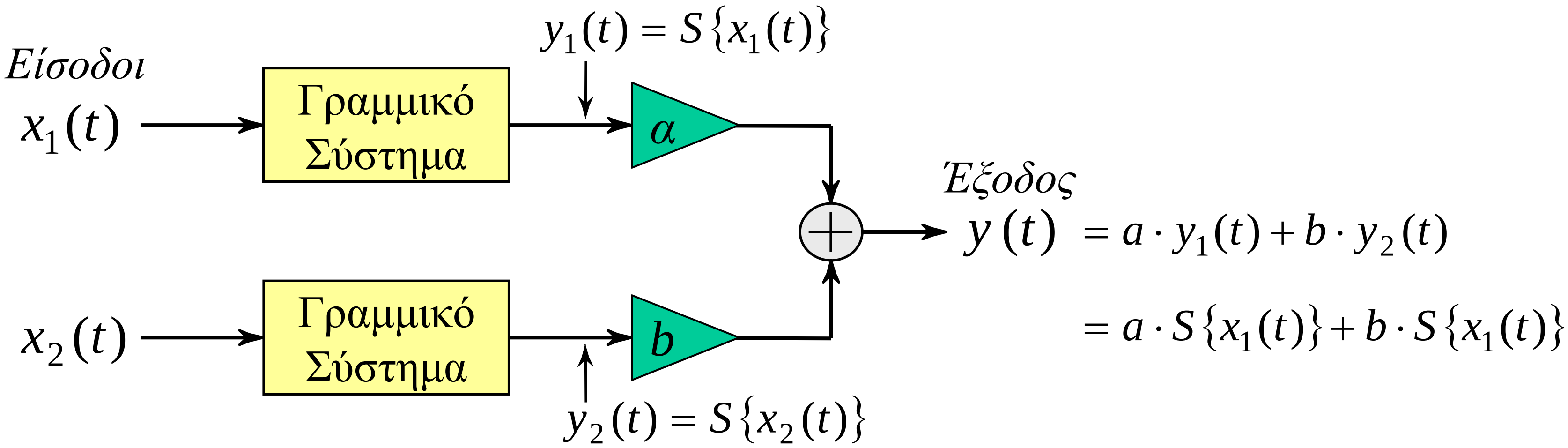
δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε μία είσοδο, που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στο καθένα από τα σήματα αυτά.

$$y(t) = S\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot S\{x_1(t)\} + b \cdot S\{x_2(t)\} = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Σχηματική περιγραφή της γραμμικότητας ενός συστήματος

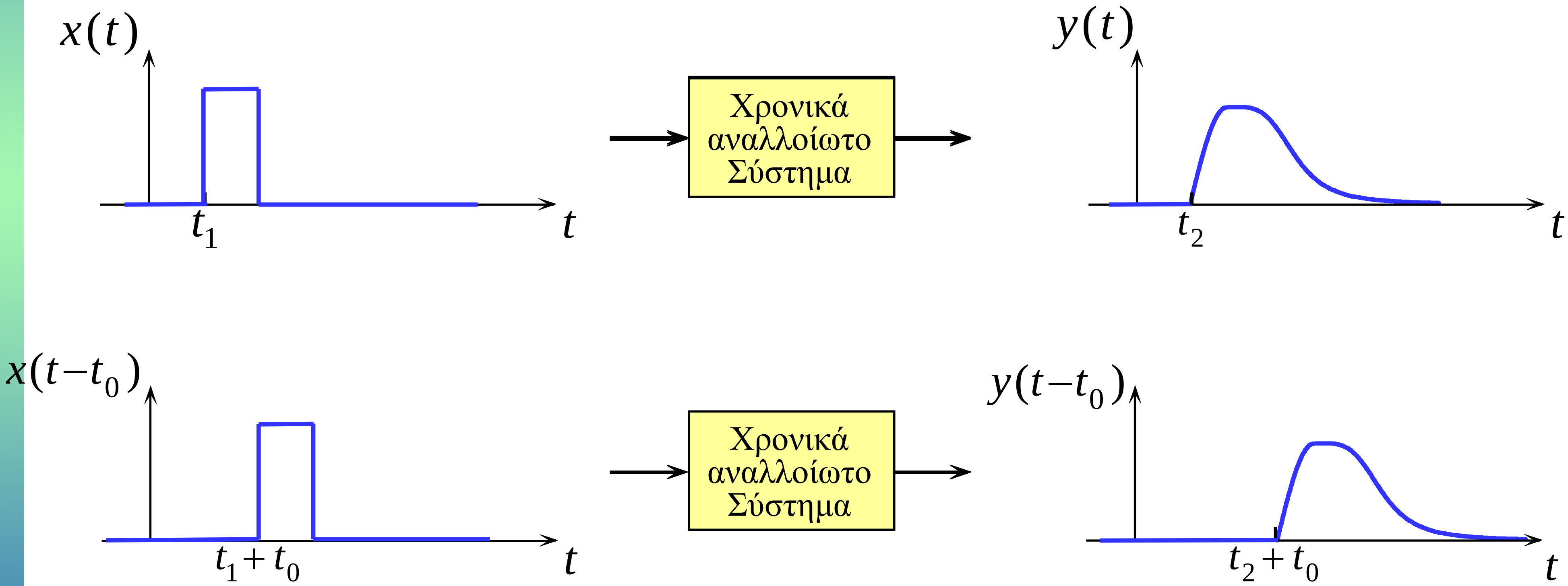
$$y(t) = S\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot S\{x_1(t)\} + b \cdot S\{x_2(t)\} = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$





Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

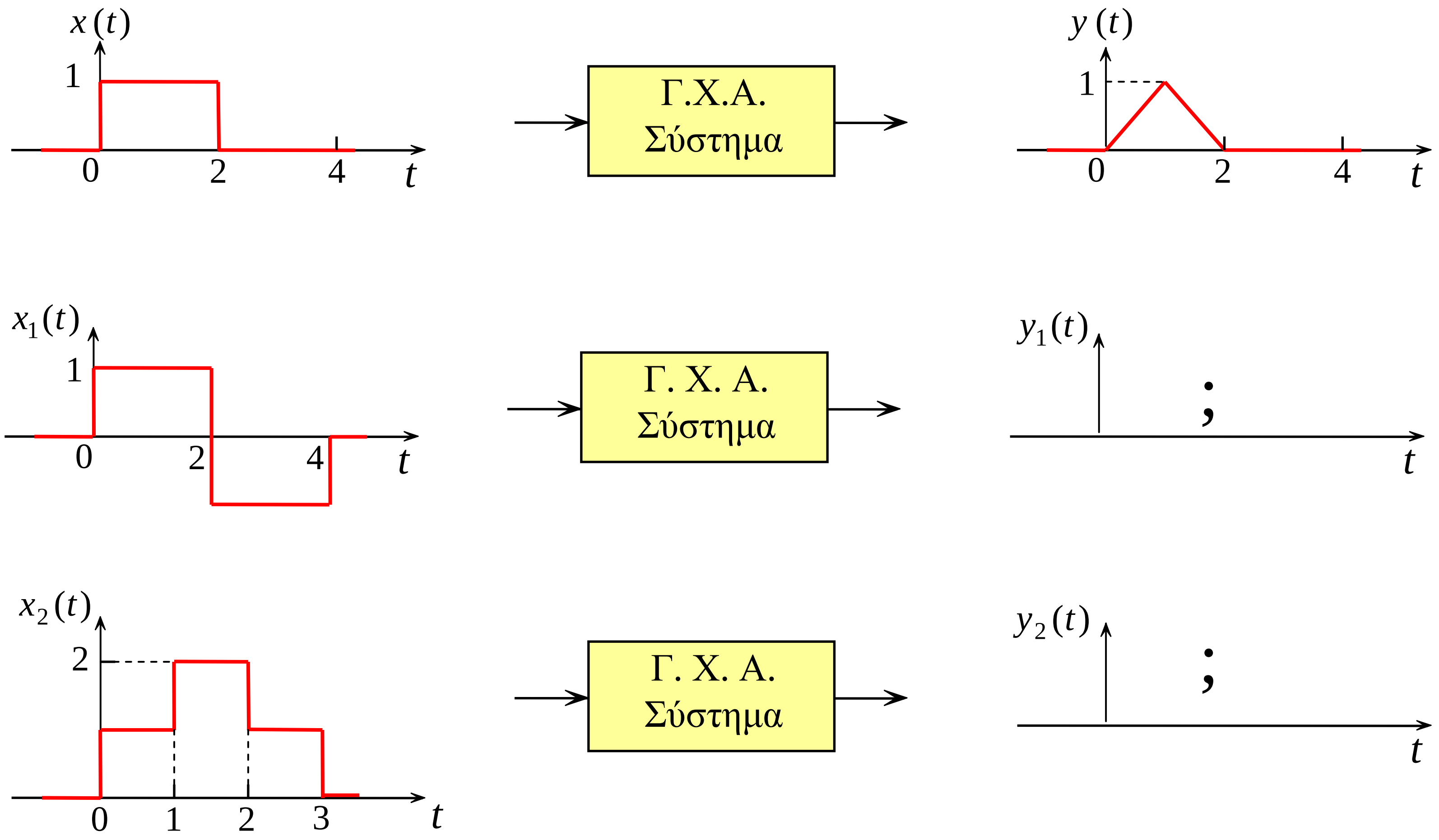
Ένα σύστημα λέγεται ***χρονικά αναλλοίωτο* (*ΧΑ*) (*αμετάβλητο*)** αν και μόνο αν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο.

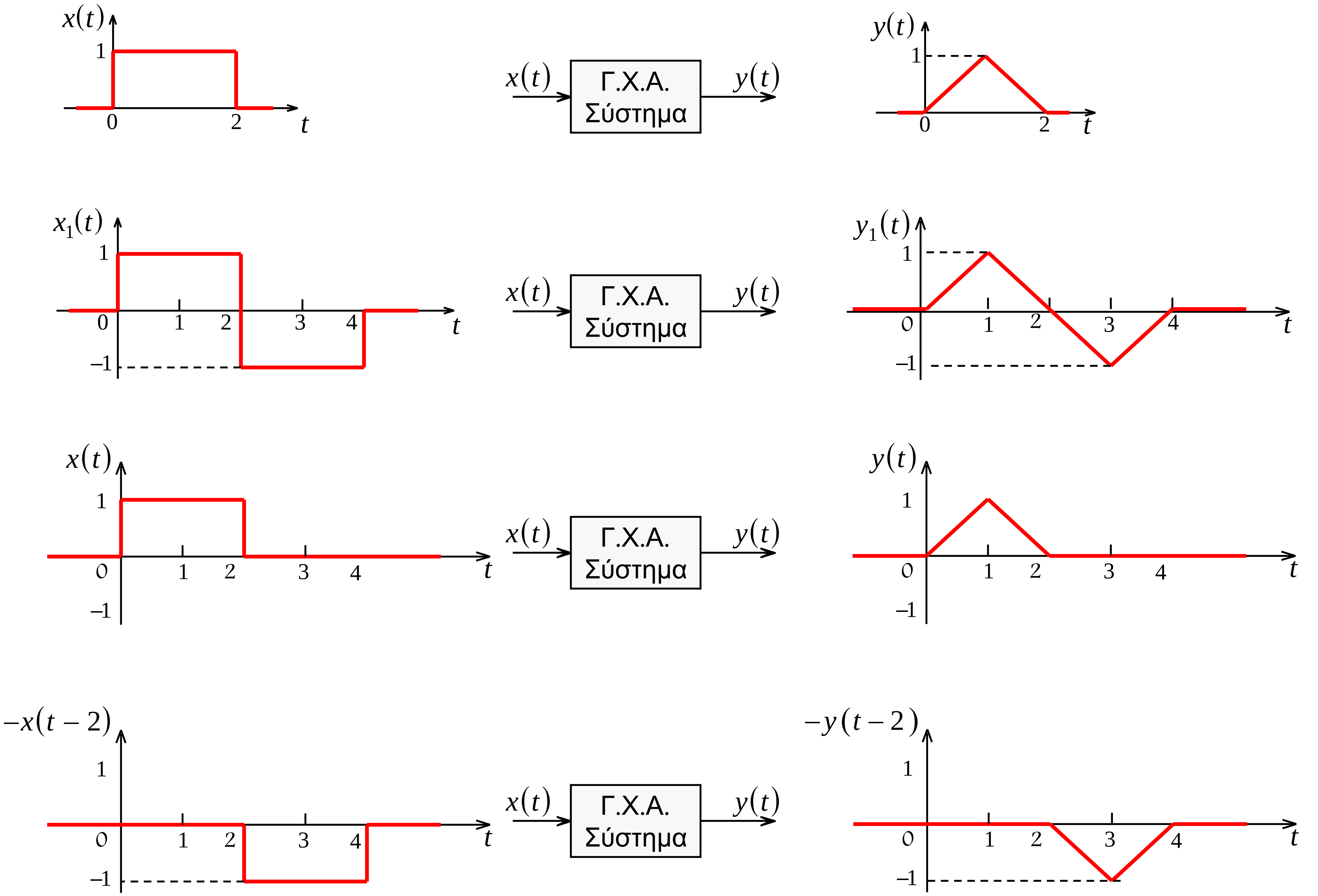


Η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος χρονικά αναλλοιώτου.

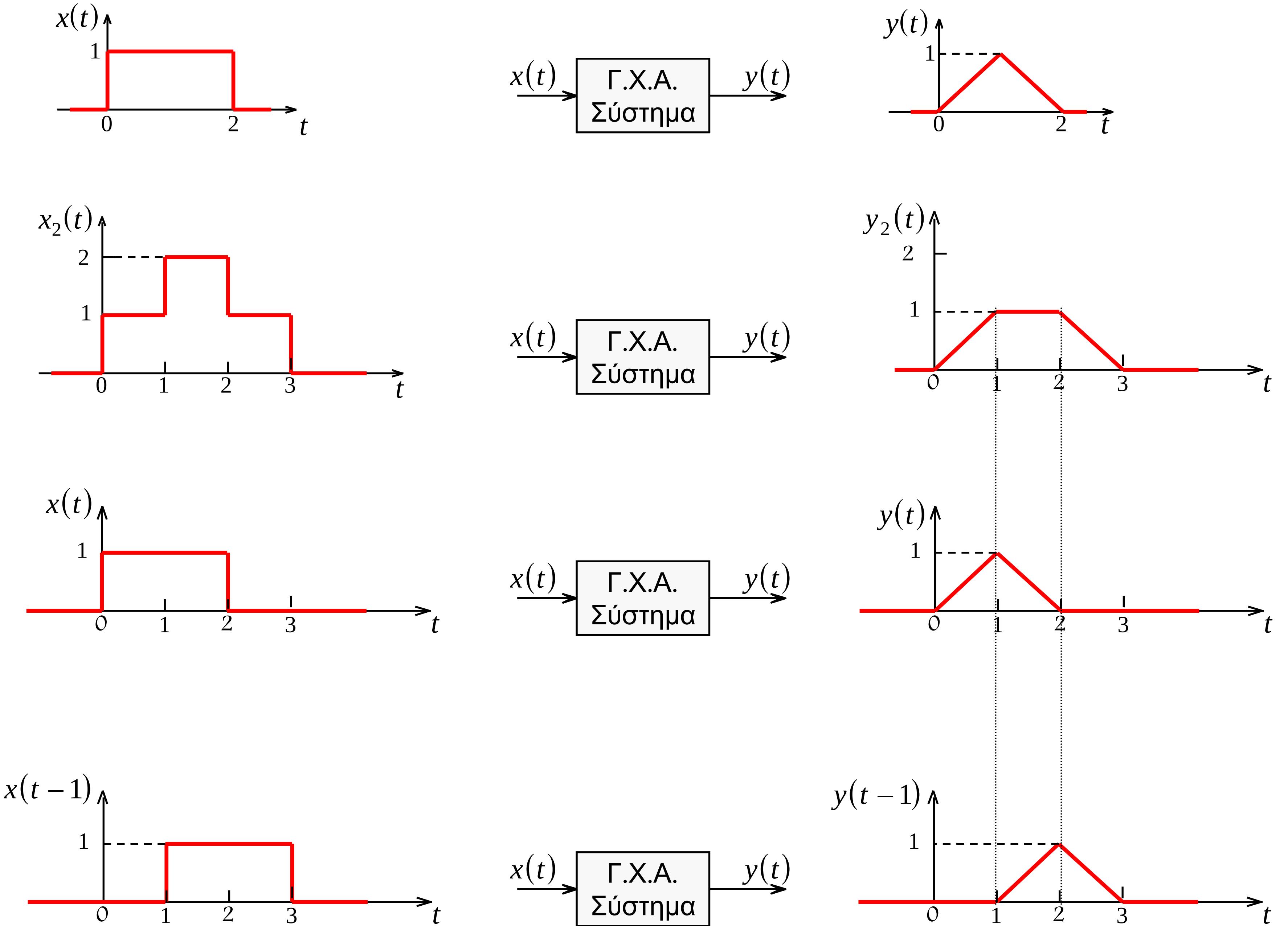
Εφαρμογή

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας βρίσκουμε πολλές φορές εύκολα την έξοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος





x(t)
1
0
2
t
x(t)
Γ.Χ.Α.
Σύστημα
y(t)
y(t)
1
0
2
t
x1(t)
1
0
1
2
3
4
t
–1
y1(t)
1
0
1
2
3
4
t
–1
x(t)
1
0
1
2
3
4
t
–1
y(t)
1
0
1
2
3
4
t
–1
−x(t − 2)
1
0
1
2
3
4
t
–1
−y(t − 2)
1
0
1
2
3
4
t
–1



$x(t)$
$y(t)$
Γ.Χ.Α. Σύστημα
$x_2(t)$
$y_2(t)$
$x(t-1)$
$y(t-1)$
t

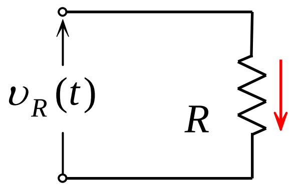
Αιτιότητα

Ένα σύστημα είναι ***αιτιατό***, όταν για κάθε σήμα το οποίο εφαρμόζεται στην είσοδό του η αντίστοιχη έξοδός του εξαρτάται μόνο από την ***παρούσα*** ή και ***τις προηγούμενες*** τιμές της εισόδου.

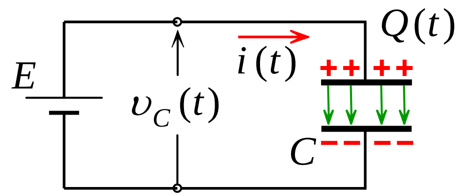
Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι ***αιτιατό***, αν οι μεταβολές στην έξοδο (***αποτέλεσμα***) του συστήματος, ποτέ δεν προηγούνται των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (***αιτία***).

Αιτιατά Σύστημα:

$$y(t) = a \cdot x(t) \qquad y(t) = b \cdot x(t - t_0) \qquad y(t) = a_0 \cdot x(t) + a_1 \cdot x(t - t_0)$$



$$i(t) = \frac{1}{R} \upsilon_R(t)$$



$$\upsilon_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)\, d\tau$$

Μη Αιτιατό Σύστημα:

$$y(t) = a_0 \cdot x(t) + a_1 \cdot x(t + t_0)$$

Αντιστρέψιμα και μη αντιστρέψιμα συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται ***αντιστρέψιμο***, όταν η γνώση του σήματος εξόδου καθιστά εφικτό τον υπολογισμό του σήματος εισόδου.

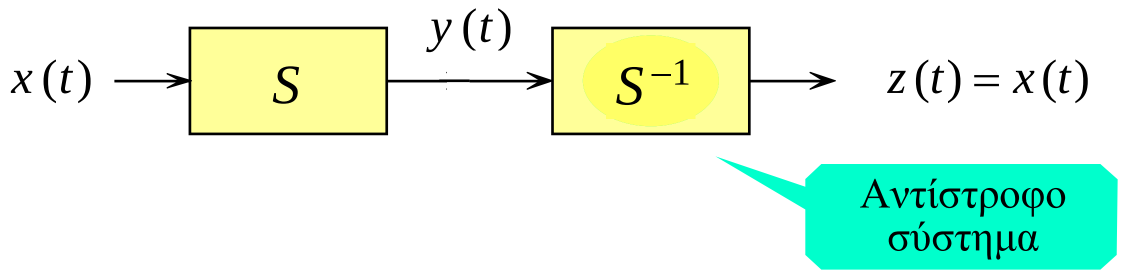
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow y(t) = c \cdot x(t) \qquad x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Αντίστροφο}\\ \text{σύστημα}\end{array}} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{c}\, x(t)$$

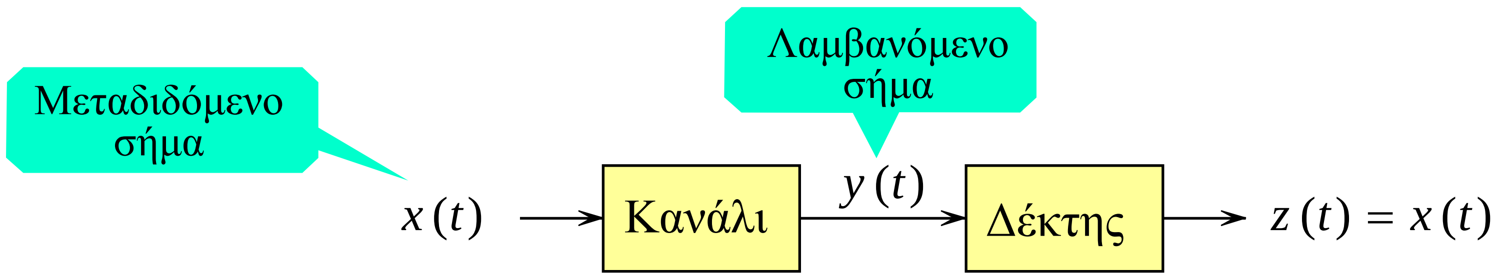
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow y(t) = x^2(t)$$

Δεν αντιστρέφεται

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \qquad x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Αντίστροφο}\\ \text{σύστημα}\end{array}} \longrightarrow y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Η ***διαδικασία αντιστροφής*** ενός συστήματος S συνίσταται στον προσδιορισμό ενός συστήματος S^{-1} το οποίο συνδεόμενο σε σειρά με το S, παρέχει στην έξοδό του το σήμα εισόδου του S.





Ο δέκτης αποτελεί ***τον αντιστροφέα*** του καναλιού. Ο σκοπός του δέκτη είναι ***η ανάκτηση*** του μεταδιδόμενου σήματος

Στατικά Συστήματα ή συστήματα χωρίς μνήμη

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ως ***στατικό σύστημα*** ή ***σύστημα χωρίς μνήμη*** όταν για κάθε σήμα εισόδου η αντίστοιχη έξοδος για κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή.

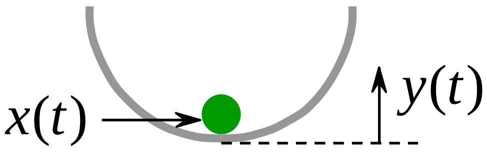
Η είσοδος και η έξοδος συστήματος χωρίς μνήμη.

Δυναμικά Συστήματα ή συστήματα με μνήμη

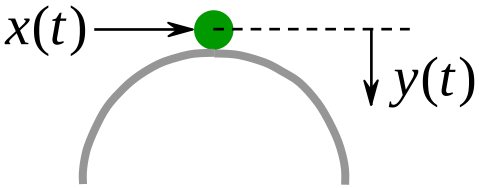
Η είσοδος και η έξοδος συστήματος με μνήμη.

Ευστάθεια

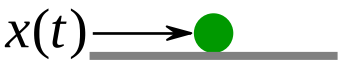
Μία από τις σημαντικότερες έννοιες στην θεωρία συστημάτων είναι αυτή της ***ευστάθειας***.



Στο σύστημα το σφαιρίδιο ισορροπεί και αν εφαρμοστεί μία μικρή οριζόντια δύναμη για μικρό χρονικό διάστημα θα μετακινηθεί λίγο και θα επανέλθει στην αρχική του θέση μετά από κάποιες ταλαντώσεις (το σύστημα θεωρείται πραγματικό και παρουσιάζει τριβές). Πρόκειται για ένα ***ευσταθές σύστημα***.



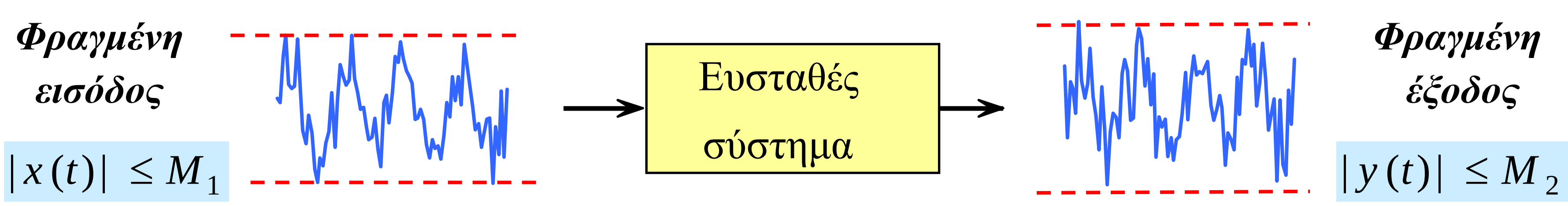
Στο σύστημα το σφαιρίδιο ισορροπεί αλλά αν μετακινηθεί λίγο λόγω μικρής και περιορισμένης διάρκειας οριζόντιας δύναμης, θα κυλίσει προς τα κάτω και δεν πρόκειται ποτέ να επανέλθει στην αρχική του θέση, κατάσταση που εκφράζει ότι το ***σύστημα είναι ασταθές***. Παρατηρήστε ότι η απόκριση, η κατακόρυφη θέση, θα αυξάνει με το χρόνο χωρίς περιορισμό.



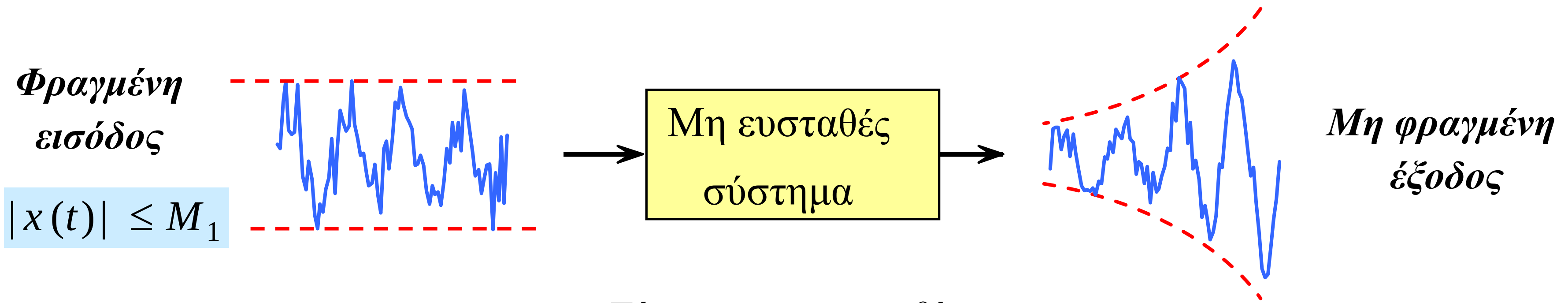
Στο σύστημα μία μικρή και περιορισμένης διάρκειας οριζόντια δύναμη θα μετακινήσει λίγο το σφαιρίδιο, το οποίο θα παραμείνει εκεί που θα πάει, όπου έχει την ίδια απόκριση (κατακόρυφη θέση). Η κατάσταση αυτή ***αδιάφορης ισορροπίας***, εκφράζει την ***οριακή ευστάθεια***.

Ευστάθεια

Ένα σύστημα λέγετε ότι είναι ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** (ευστάθεια *Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου*) (*Bounded Input Bounded Output* (*BIBO*) *stable*) αν και μόνον αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.



Σύστημα ευσταθές.



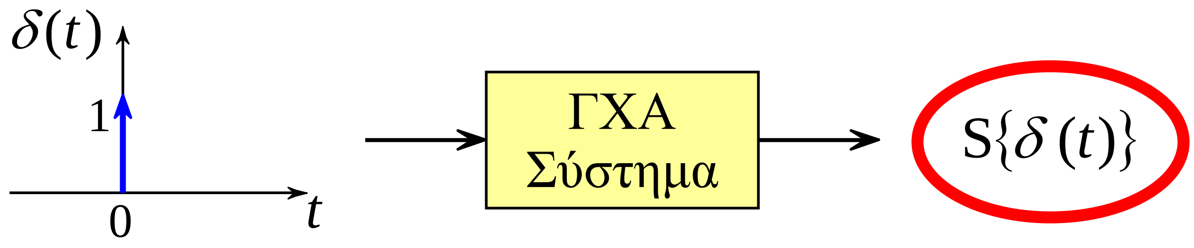
Σύστημα μη ευσταθές.

Σχέση μεταξύ Εισόδου - Εξόδου συστήματος

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε ***τη σχέση*** με τη βοήθεια της οποίας ***προσδιορίζουμε την έξοδο*** ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, αν γνωρίζουμε

α) το σήμα εισόδου του συστήματος και

β) την απόκριση του συστήματος (το σήμα εξόδου), όταν αυτό διεγείρεται από τη $\delta(t)$



Ορίζουμε ως ***κρουστική απόκριση του συστήματος*** την έξοδο του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι η κρουστική συνάρτηση

$$h(t) = S\{\delta(t)\}$$

Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης (συγκερασμού).

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Το σήμα εξόδου του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ***ολοκλήρωμα της συνέλιξης***, και συμβολίζεται ως

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Το ***ολοκλήρωμα της συνέλιξης*** γράφεται και ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Παρατηρούμε ότι σε ένα ΓΧΑ σύστημα αρκεί η γνώση μιας μόνο συνάρτησης, της $h(t)$, για να περιγραφεί πλήρως η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ του συστήματος με τη βοήθεια του ***ολοκληρώματος της συνέλιξης***.

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Η πράξη η οποία συνδυάζει δύο σήματα $x(t)$ και $h(t)$ για το σχηματισμό του σήματος $y(t)$ καλείται ***συνέλιξη***.

Αν το σύστημα είναι αιτιατό τότε το σήμα εξόδου του συστήματος δίνεται από την

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Αν το σήμα εισόδου είναι αιτιατό σήμα, τότε το σήμα εξόδου δίνεται από την

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ***ΦΕΦΕ ευσταθές***, αν η κρουστική του απόκριση είναι ***απόλυτα ολοκληρώσιμη***, δηλαδή, αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|\, d\xi < +\infty$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Το σήμα εισόδου είναι φραγμένο, δηλαδή είναι $|x(\tau)| \le M < \infty$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\, |h(t-\tau)|\, d\tau$$

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} M\, |h(t-\tau)|\, d\tau \xrightarrow{t-\tau=\xi}$$

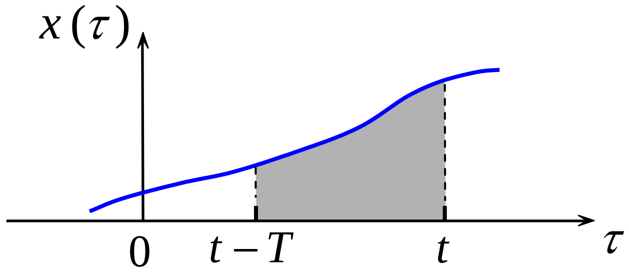
$$|y(t)| \le M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|\, d\xi \le M_2$$

και επειδή η κρουστική του απόκριση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη έπεται ότι και το σήμα εξόδου του συστήματος είναι επίσης φραγμένο, οπότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη σχέση σήματος εισόδου – σήματος εξόδου

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

αναφέρεται ως ***σύστημα μέσης τιμής***. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

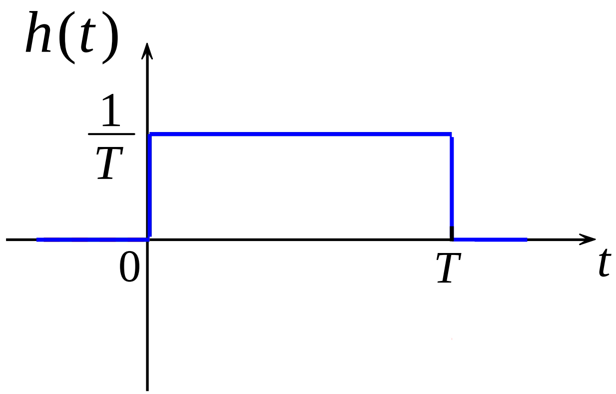


$$\delta(\tau) = \frac{d\,u(\tau)}{d\tau}$$

$$\delta(\tau)\,d\tau = d\,u(\tau)$$

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} d\,u(\tau) = \frac{1}{T}\,u(\tau)\Big|_{t-T}^{t}$$



$$\boxed{h(t) = \frac{1}{T}\Big[\,u(t) - u(t-T)\Big]} = \frac{1}{T}\,\Pi\!\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη σχέση σήματος εισόδου – σήματος εξόδου

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

αναφέρεται ως ***σύστημα μέσης τιμής***. Να εξετάσετε, αν το σύστημα είναι γραμμικό.

Έστω $y_1(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x_1(\tau)\,d\tau$ και $y_2(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$

η απόκριση του συστήματος στο γραμμικό συνδυασμό των δύο σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \left[a\cdot x_1(\tau) + \beta\cdot x_2(\tau)\right]d\tau$$

$$= a\,\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x_1(\tau)\,d\tau + \beta\,\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = a\cdot y_1(t) + \beta\cdot y_2(t)$$

παρατηρούμε ότι η $y(t)$ ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στο καθένα από τα σήματα αυτά, επομένως το σύστημα είναι γραμμικό.

Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη σχέση σήματος εισόδου – σήματος εξόδου

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

αναφέρεται ως ***σύστημα μέσης τιμής***. Να εξετάσετε, αν το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο.

Έστω $y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$ η έξοδος του συστήματος για σήμα εισόδου $x(t)$.

Η απόκριση του συστήματος σε χρονική ολίσθηση του σήματος $x(t)$ είναι

$$y_1(t) = S\{x(t-t_0)\} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\xi - t_0)\,d\xi \overset{\tau = \xi - t_0}{=} \frac{1}{T}\int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau = y(t-t_0)$$

παρατηρούμε ότι χρονική ολίσθηση του σήματος εισόδου προκαλεί αντίστοιχη χρονική ολίσθηση στο σήμα εξόδου, επομένως το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο

Το σύστημα είναι **αιτιατό** αφού η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα και προηγούμενες τιμές της εισόδου του.

Ιδιότητες της Συνέλιξης

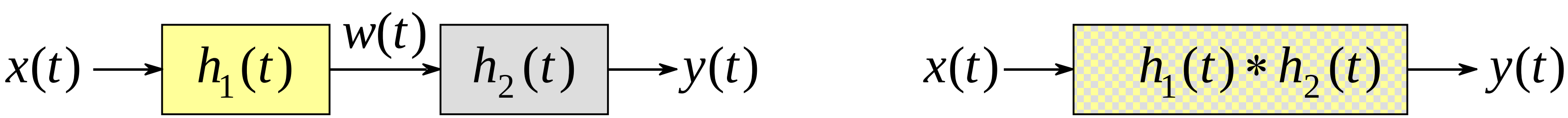
Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

Η φυσική σημασία της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης

Προσεταιριστική ιδιότητα

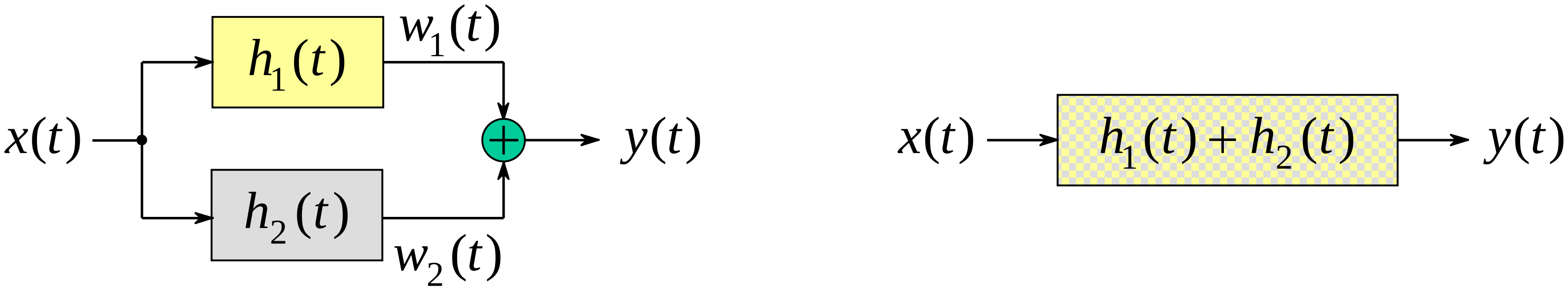
$$h_2(t) * \left[h_1(t) * x(t)\right] = \left[h_2(t) * h_1(t)\right] * x(t)$$



Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας της συνέλιξης

Επιμεριστική ιδιότητα

$$h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = \left[h_1(t) + h_2(t)\right] * x(t)$$



Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης

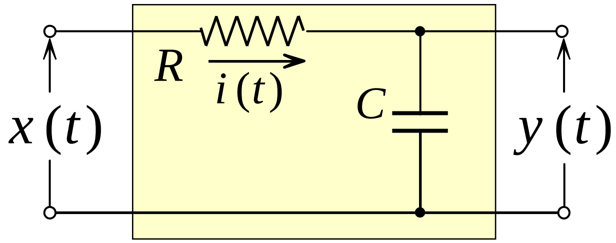
Ταυτοτική ιδιότητα

$$x(t) * h(t) = y(t) \quad \Longrightarrow \quad \delta(t) * h(t) = h(t)$$

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

$$x(t-t_0) = \delta(t-t_0) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t-t_0) = h(t-t_0)$$

$h(t) * \delta(t-t_0) = h(t-t_0)$ γενικά $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$



$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

Η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ ενός συστήματος περιγράφεται από ***μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές***.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

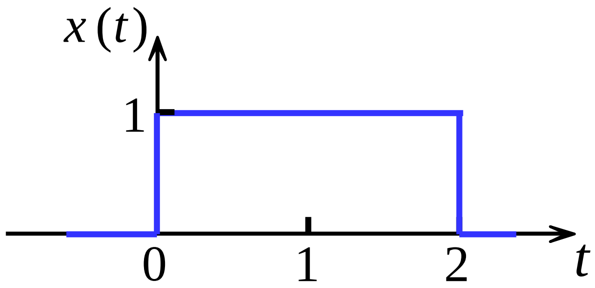
Η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι η έξοδος του συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση $\delta(t)$.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)$$

Η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ του συστήματος περιγράφεται με ***το ολοκλήρωμα της συνέλιξης***.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

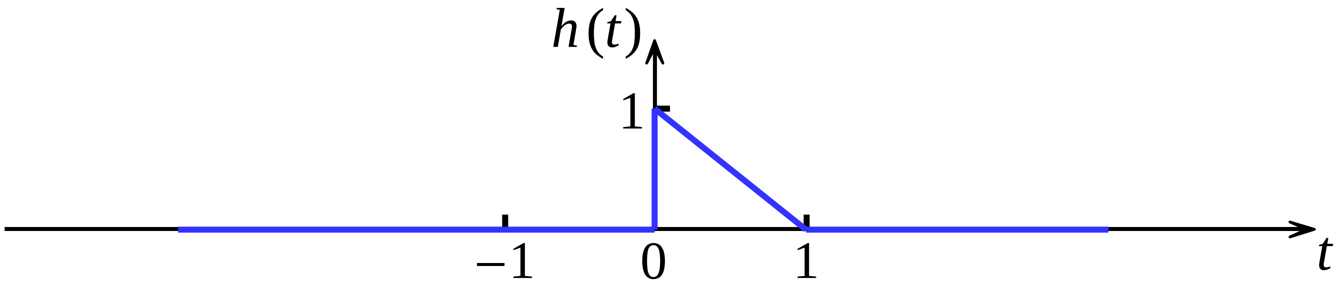
Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης – παράδειγμα



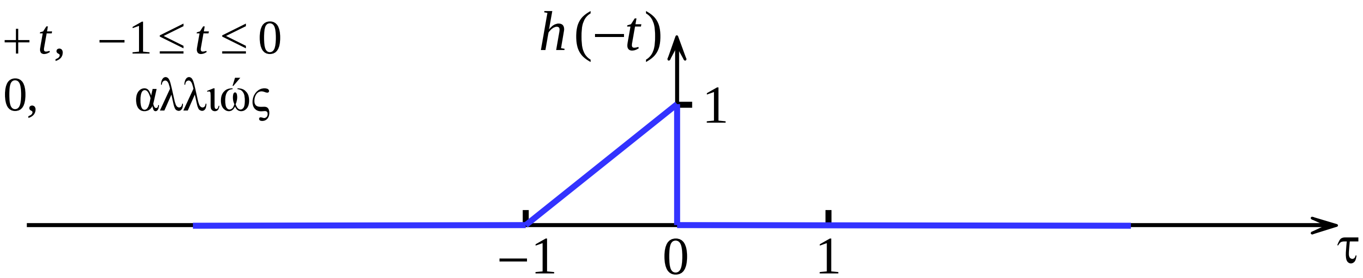
$$x(t) = u(t) - u(t-2) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

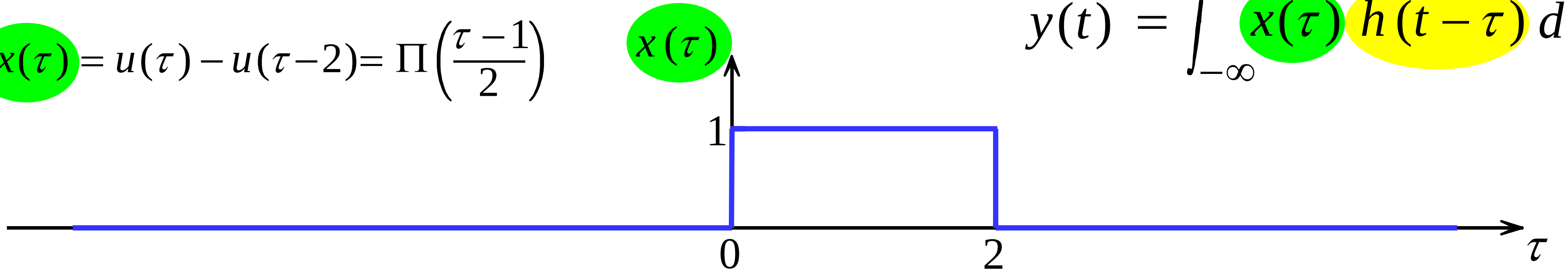


$$h(-t) = \begin{cases} 1+t, & -1 \le t \le 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



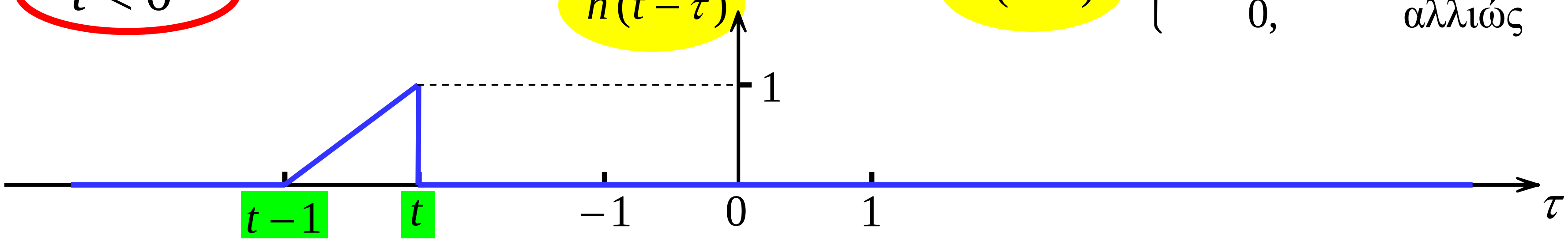
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau-2) = \Pi\left(\frac{\tau-1}{2}\right)$$

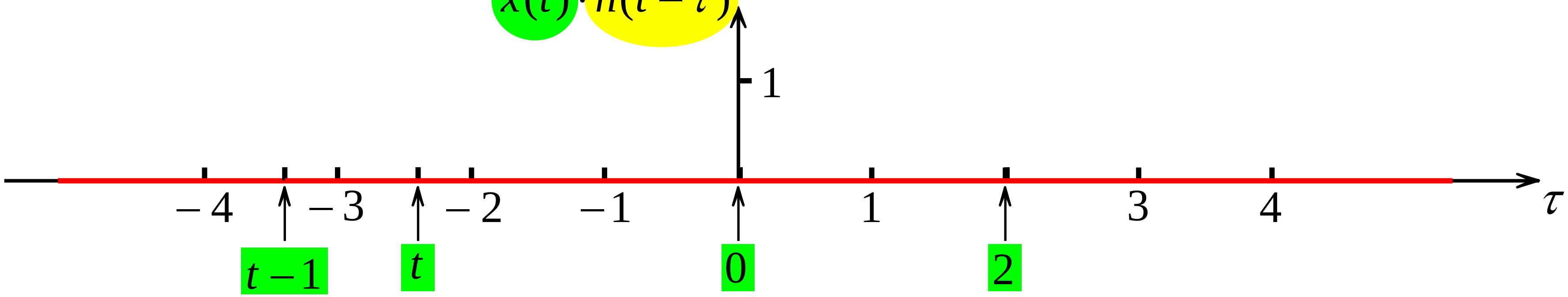


$t < 0$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

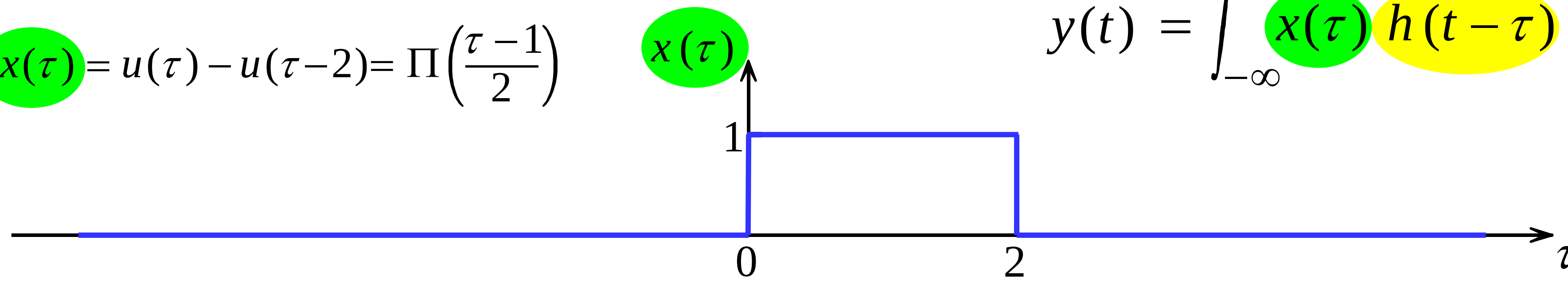


$y(t) = 0$



$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau-2) = \Pi\left(\frac{\tau-1}{2}\right)$$

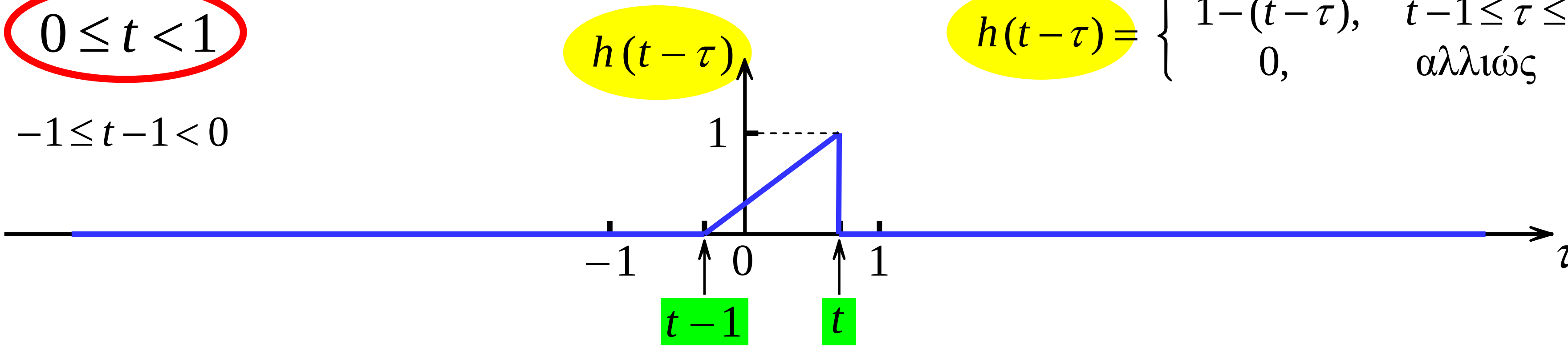
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

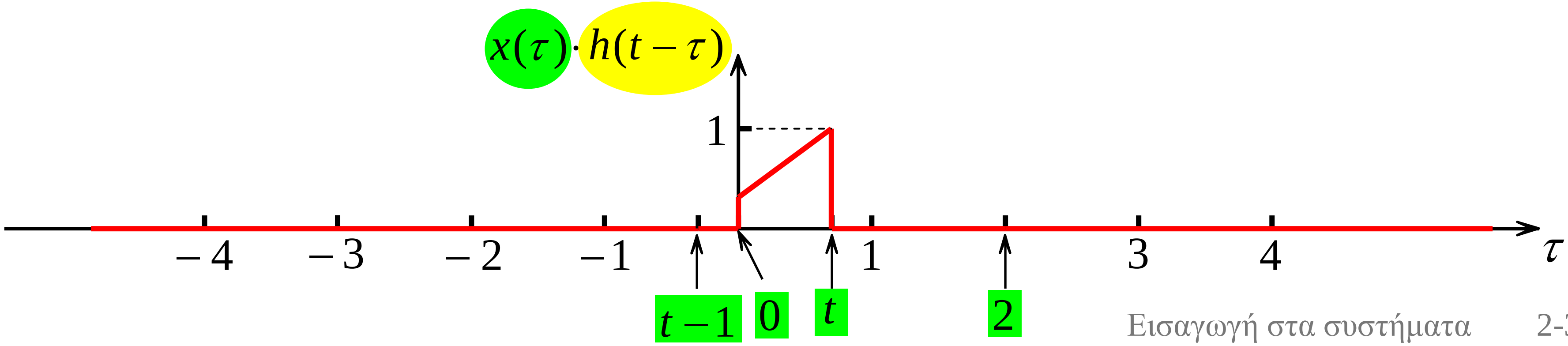


$$0 \le t < 1$$

$$-1 \le t-1 < 0$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$





$$x(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

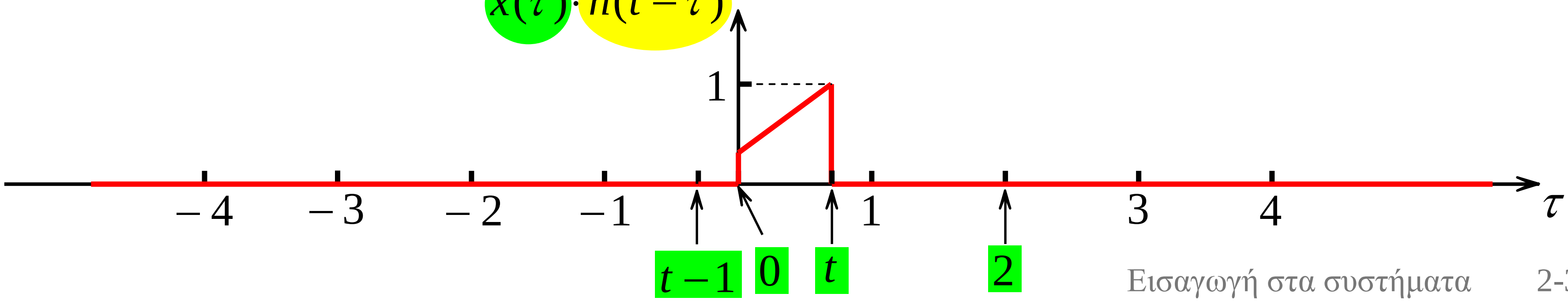
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot \big(1-(t-\tau)\big)\, d\tau$$

$$= \int_0^t d\tau - t \cdot \int_0^t d\tau + \int_0^t \tau\, d\tau$$

$$= t - t^2 + \frac{t^2}{2}$$

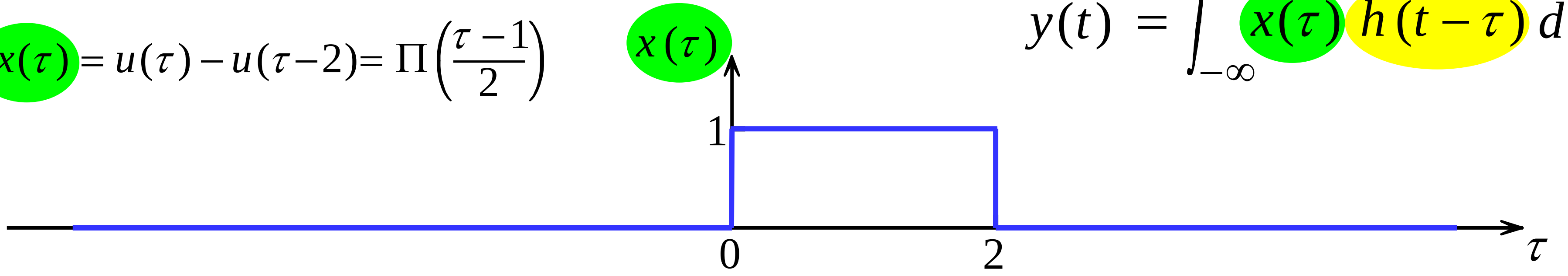
$$y(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad 0 \le t < 1$$

$x(\tau) \cdot h(t-\tau)$



$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau-2) = \Pi\left(\frac{\tau-1}{2}\right)$$

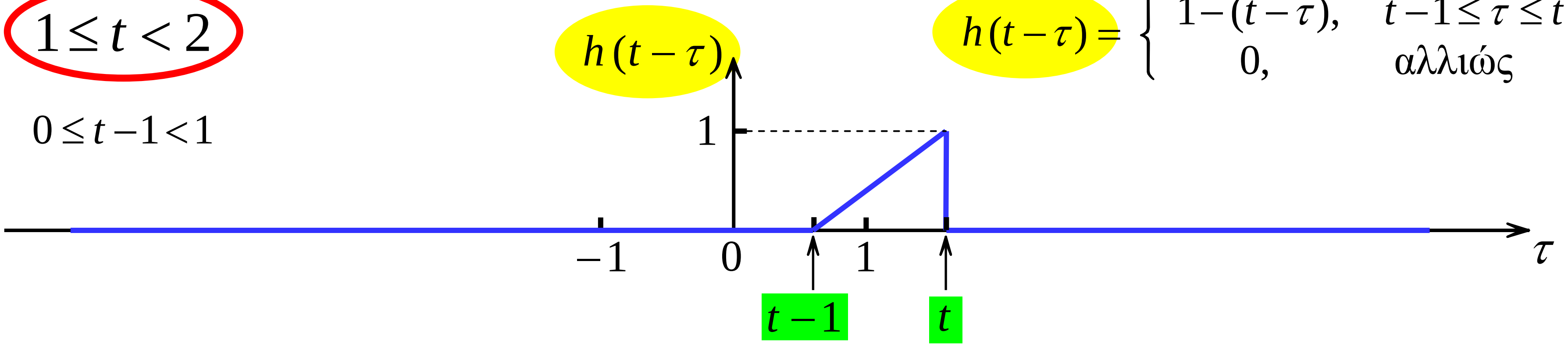
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

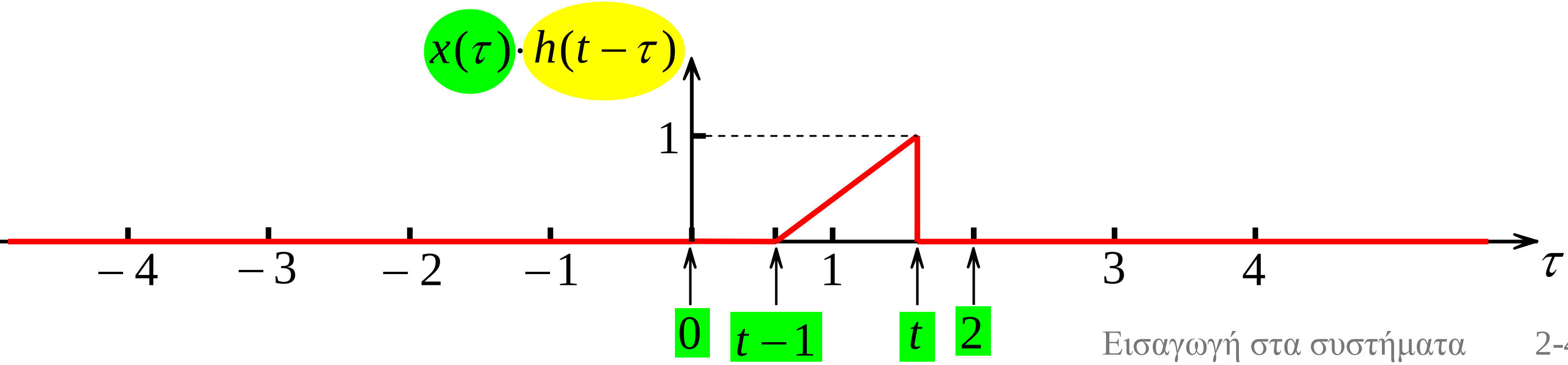


$$1 \le t < 2$$

$$0 \le t-1 < 1$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$





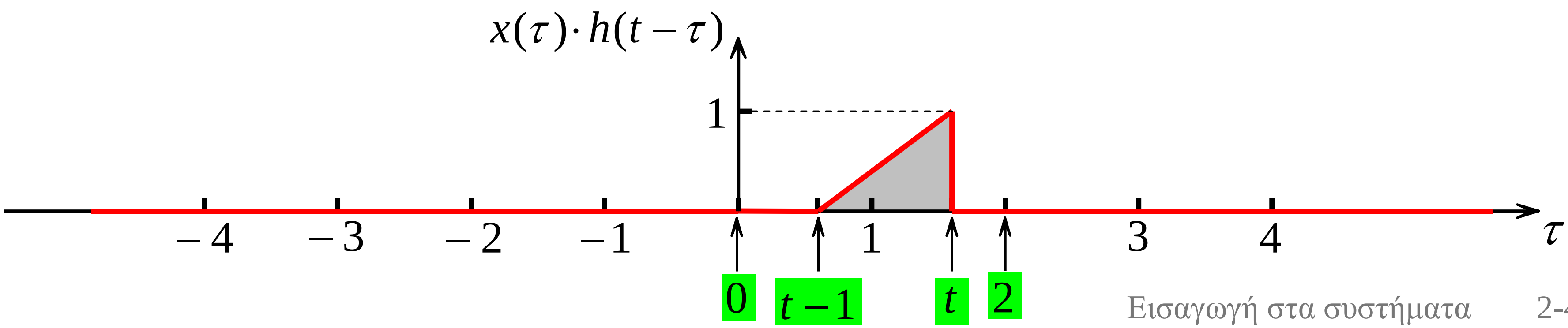
$$x(\tau)=\begin{cases}1, & 0\le\tau\le 2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \qquad h(t-\tau)=\begin{cases}1-(t-\tau), & t-1\le\tau\le t\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-1}^{t} 1 \cdot \left(1-(t-\tau)\right)\, d\tau$$

$$=\int_{t-1}^{t} d\tau - t\cdot\int_{t-1}^{t} d\tau + \int_{t-1}^{t} \tau\, d\tau$$

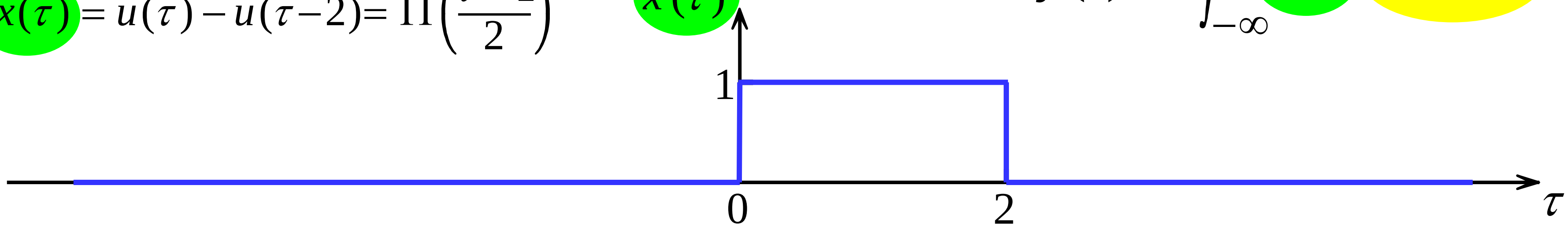
$$=1-t+\frac{2t-1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}, \quad 1\le t<2$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

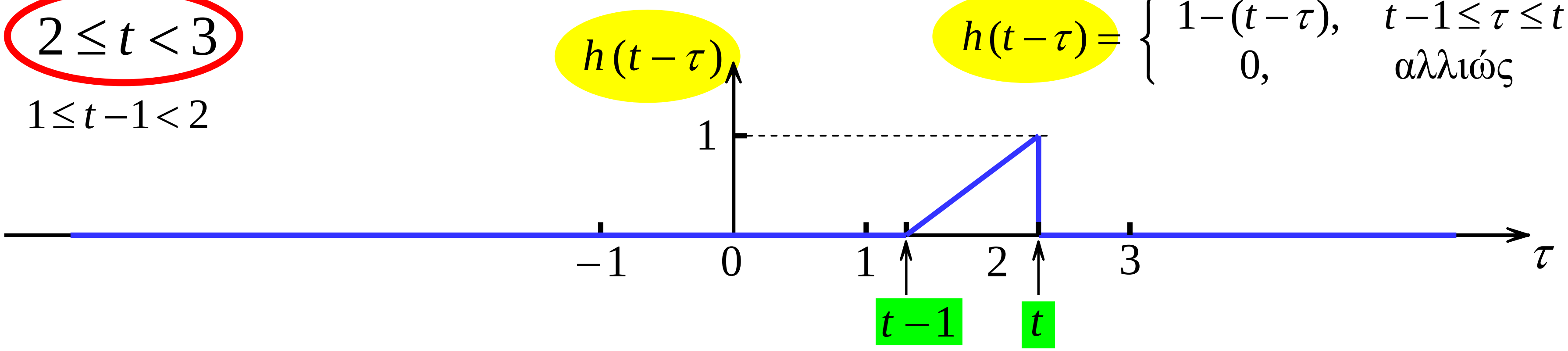
$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau-2) = \Pi\left(\frac{\tau-1}{2}\right)$$

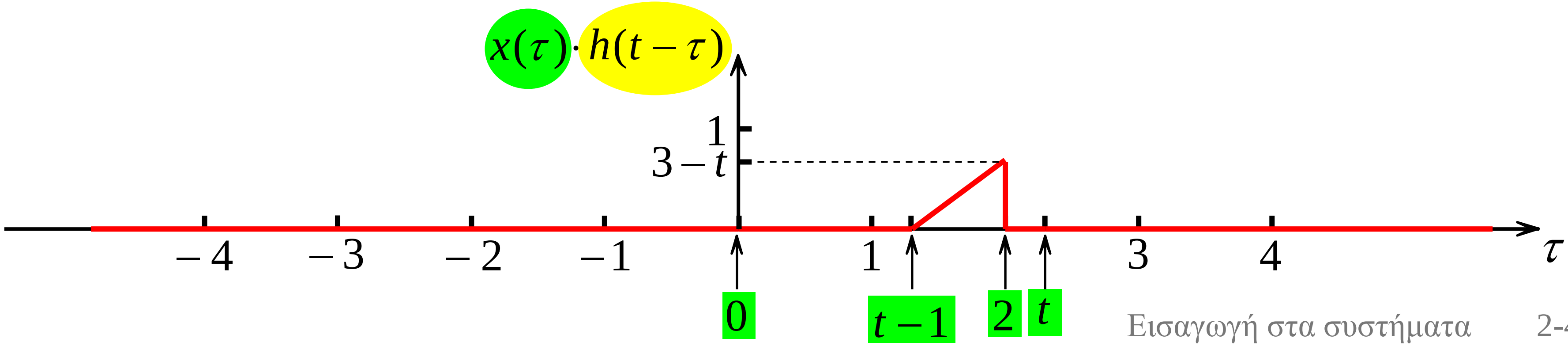


$$2 \le t < 3$$

$$1 \le t-1 < 2$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$





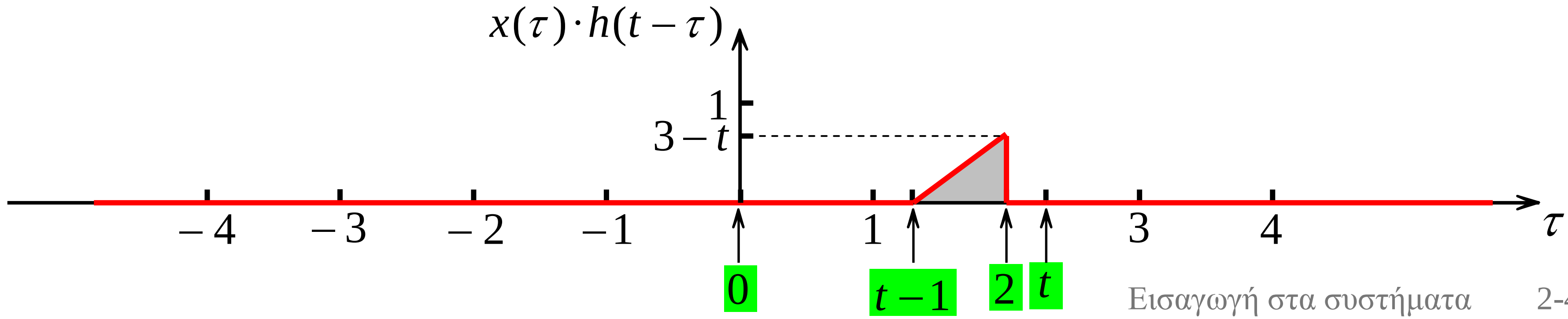
$$x(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{t-1}^{2} 1 \cdot \big(1-(t-\tau)\big)\,d\tau$$

$$= \int_{t-1}^{2} d\tau - t \cdot \int_{t-1}^{2} d\tau + \int_{t-1}^{2} \tau\,d\tau$$

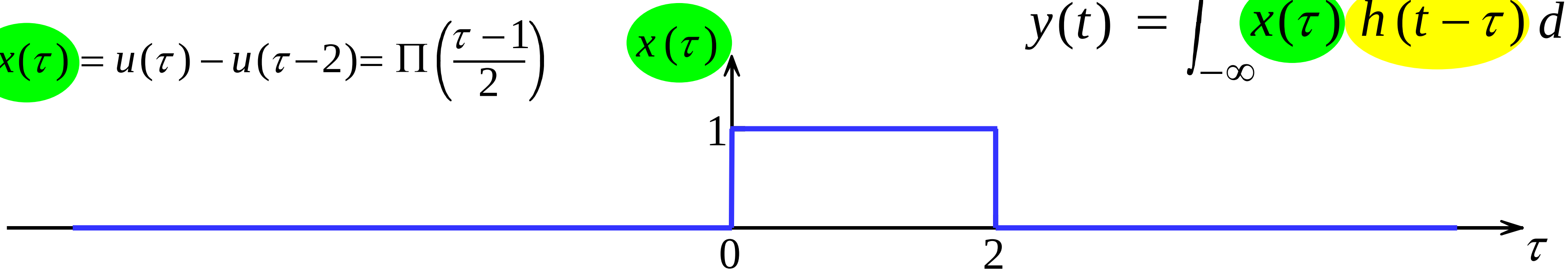
$$= 2-(t-1) - t\cdot\big(2-(t-1)\big) + \frac{2^2-(t-1)^2}{2}$$

$$y(t) = \frac{(t-3)^2}{2}, \quad 2 \le t < 3$$



$$x(\tau) = u(\tau) - u(\tau-2) = \Pi\left(\frac{\tau-1}{2}\right)$$

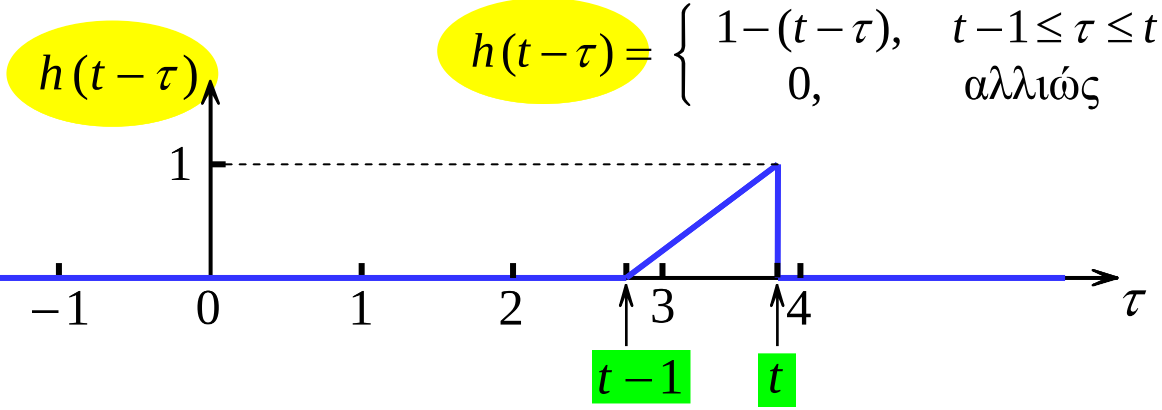
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



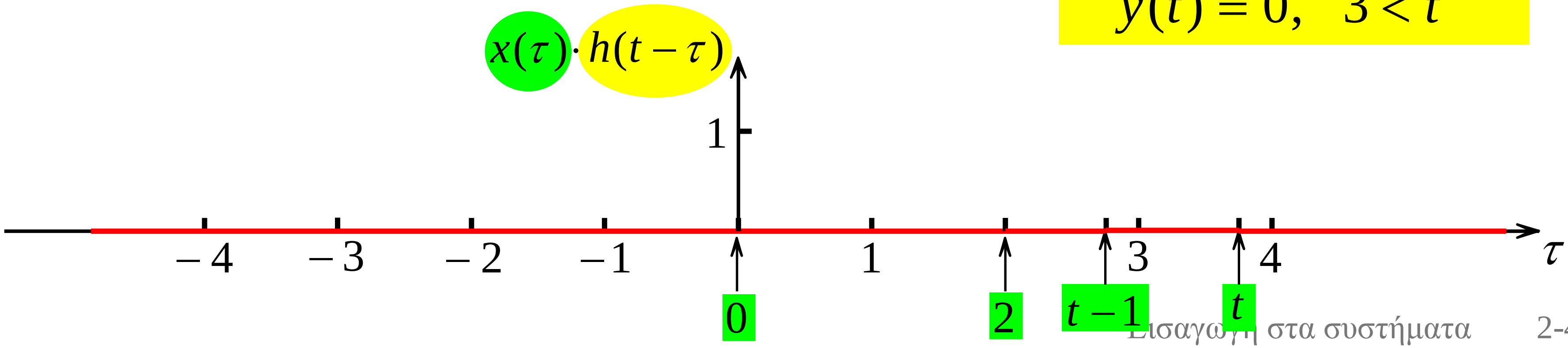
$3 \le t$

$2 \le t-1$

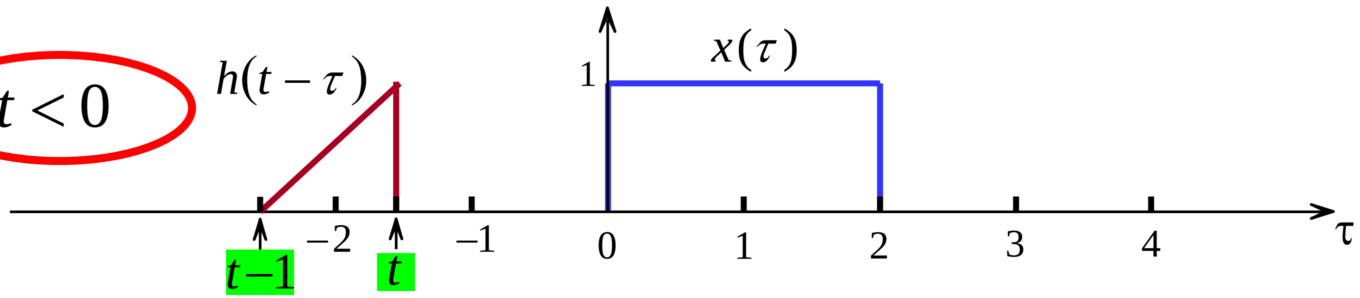
$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1-(t-\tau), & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



$$y(t) = 0, \quad 3 < t$$

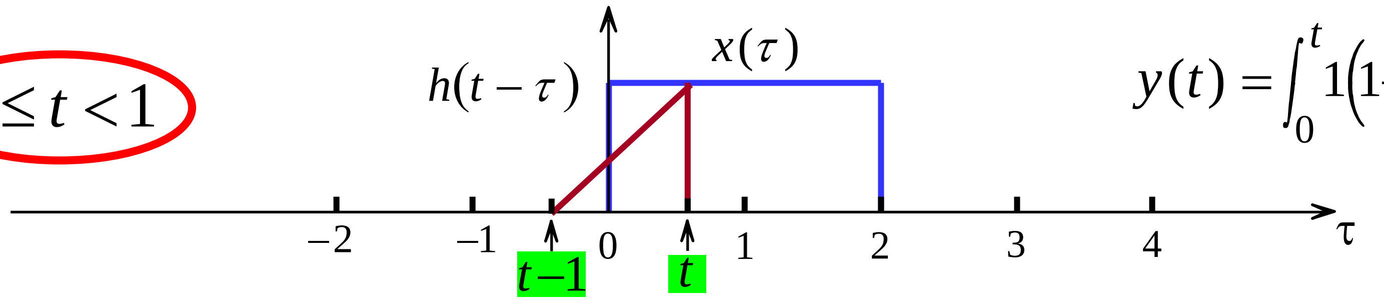


$t < 0$



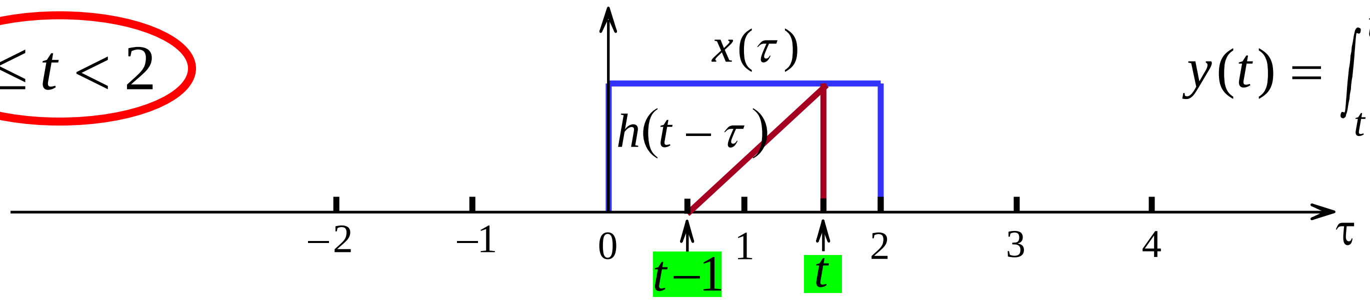
$$y(t) = 0$$

$0 \le t < 1$



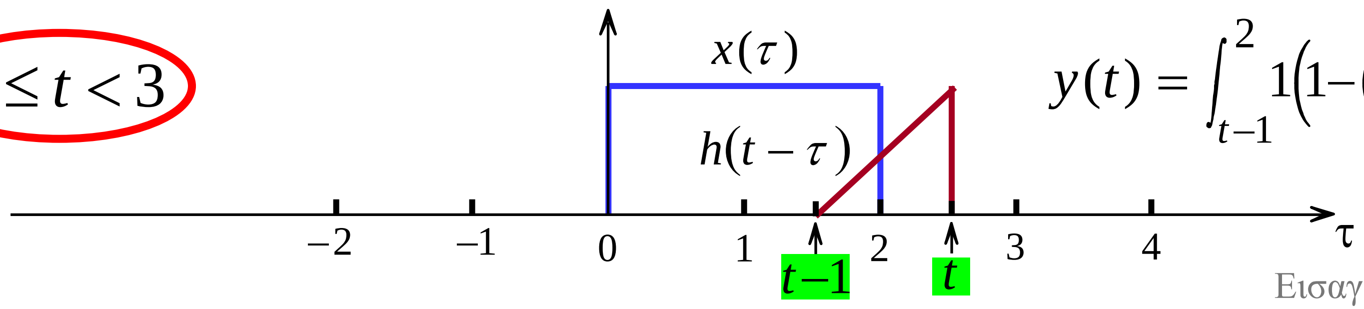
$$y(t) = \int_0^t 1\big(1-(t-\tau)\big)\,d\tau = t - \frac{t^2}{2}$$

$1 \le t < 2$



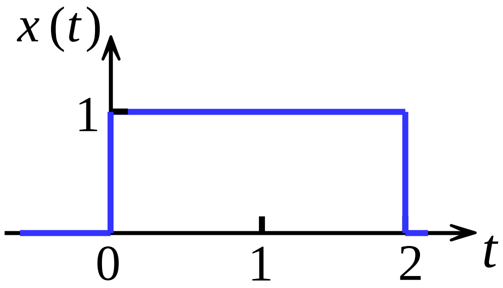
$$y(t) = \int_{t-1}^{t} 1\big(1-(t-\tau)\big)\,d\tau = \frac{1}{2}$$

$2 \le t < 3$



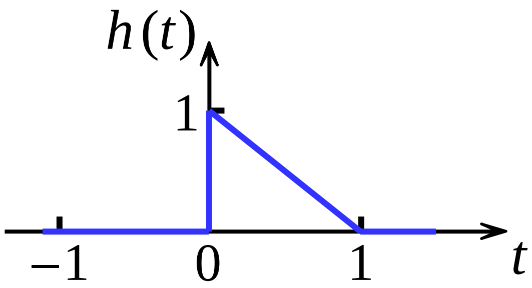
$$y(t) = \int_{t-1}^{2} 1\big(1-(t-\tau)\big)\,d\tau = \frac{(t-3)^2}{2}$$

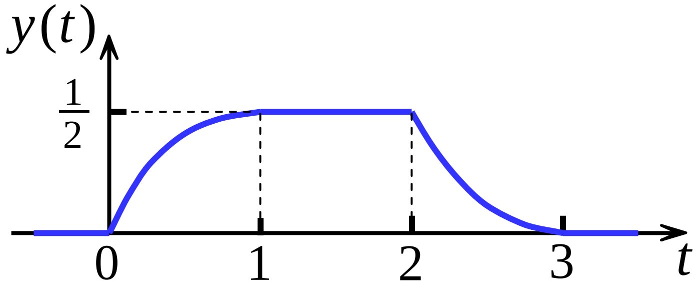
Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης – παράδειγμα



$$x(t) = u(t) - u(t-2)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$





$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t - \dfrac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \le t < 2 \\ \dfrac{(t-3)^2}{2}, & 2 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t \end{cases}$$

Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων σε Εκθετικές Εισόδους

$$x(t) = A \cdot e^{st} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) = H(s) \cdot A \cdot e^{st}$$

Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, A e^{s(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, A\, e^{st}\, e^{-s\tau}\, d\tau = A e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$y(t) = A e^{st}\, H(s)$$

Δηλαδή για την ειδική κατηγορία σημάτων $x(t) = Ae^{st}$ το σήμα εξόδου του συστήματος υπολογίζεται εύκολα από την $y(t) = H(s) \cdot x(t)$.

Η συνάρτηση $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$ είναι ο **Μετασχηματισμός Laplace** της $h(t)$.

Η συνάρτηση $H(s)$ ονομάζεται **Συνάρτηση Μεταφοράς του Συστήματος**.

$$x(t) = A \cdot e^{st} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) = H(s) \cdot A \cdot e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \xrightarrow{s = j\omega} H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Η συνάρτηση $H(\omega)$ είναι ο ***Μετασχηματισμός Fourier*** της $h(t)$ και αποτελεί την ***Απόκριση συχνότητας του συστήματος***.

$$x(t) = A \cdot e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = H(\omega_0) \cdot A \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = H(\omega_0) \cdot A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$x(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = H(\omega_0) \cdot A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

Η απόκρισης συχνότητας είναι μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας ω και γενικά έχει τη μορφή

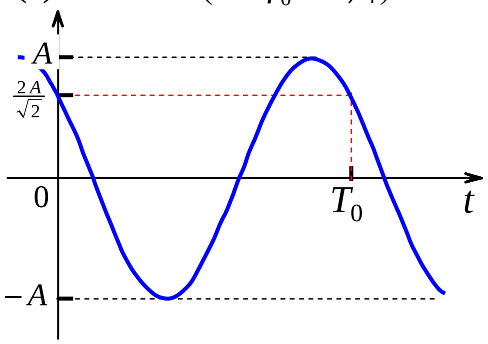
$$\underbrace{H(\omega)}_{\text{Απόκριση συχνότητας}} = |H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)}$$

Επομένως

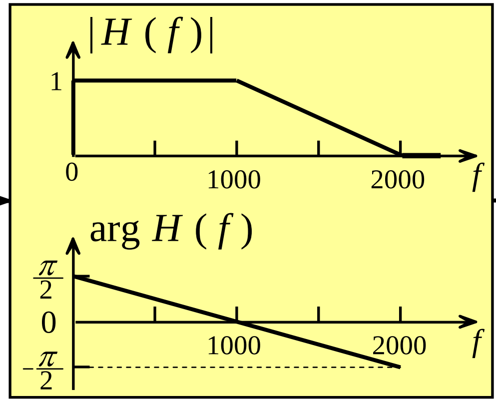
$$y(t) = |H(\omega_0)| e^{j \arg H(\omega_0)} \cdot A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = |H(\omega_0)| \cdot A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi + \arg H(\omega_0))}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = \overbrace{|H(\omega_0)|}^{\text{Απόκριση πλάτους}} \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi + \overbrace{\arg H(\omega_0)}^{\text{Απόκριση φάσης}})$$

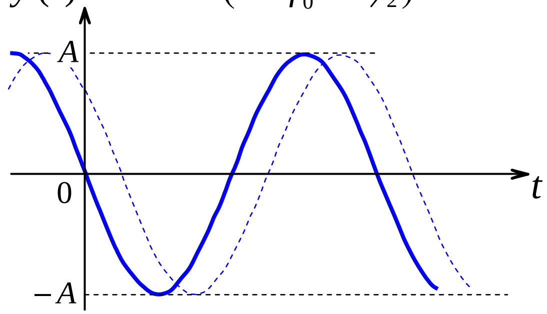
$x(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$



Το σήμα εισόδου x(t).

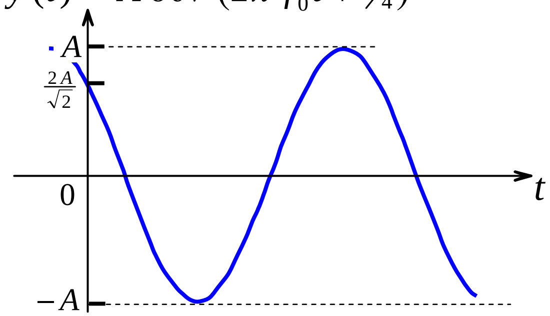


$y(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$



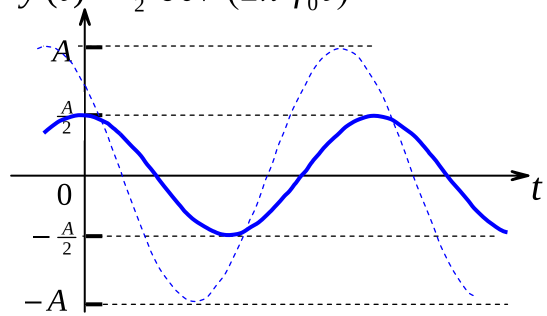
Η έξοδος του συστήματος όταν f_0 = 500 Hz.

$y(t) = A\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$



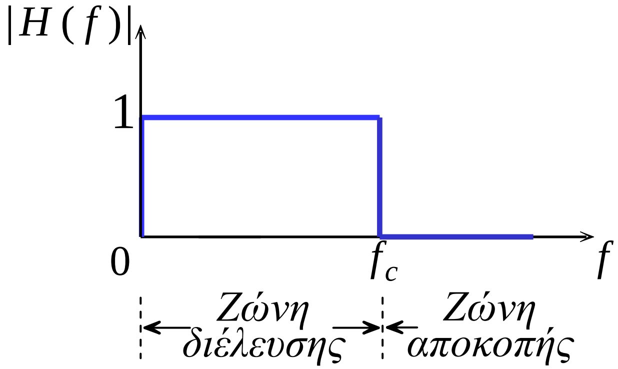
Η έξοδος του συστήματος όταν f_0 = 1000 Hz.

$y(t) = \frac{A}{2}\,\text{συν}\left(2\pi f_0 t\right)$

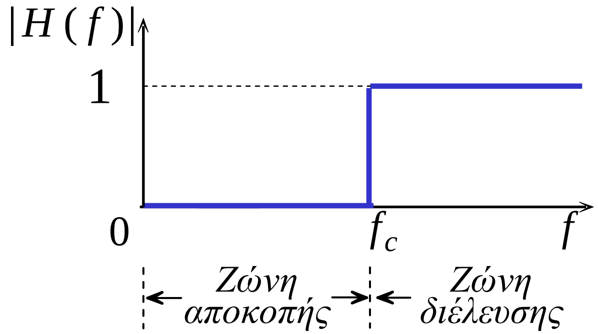


Η έξοδος του συστήματος όταν f_0 = 1500 Hz.

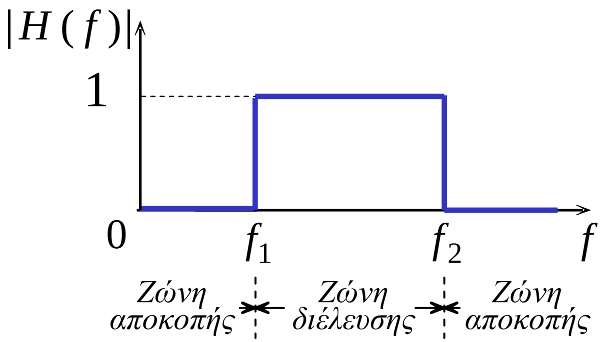
Ιδανικά φίλτρα



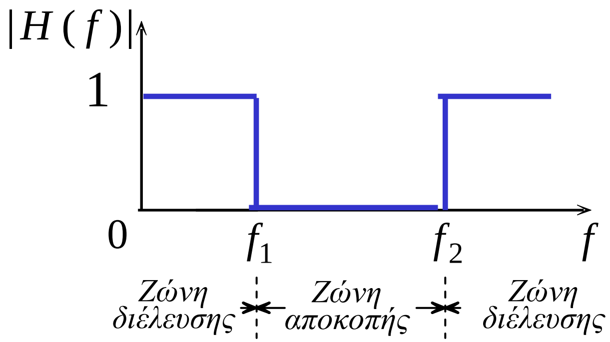
Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο



Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο



Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο



Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

$$x_1(t) = e^{j\omega_1 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y_1(t) = H(\omega_1)\cdot e^{j\omega_1 t}$$

$$x_2(t) = e^{j\omega_2 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y_2(t) = H(\omega_2)\cdot e^{j\omega_2 t}$$

Αν εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα του συστήματος έχουμε

$$x(t) = a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow \begin{aligned} y(t) &= a_1\, y_1(t) + a_2\, y_1(t) \\ &= a_1 H(\omega_1)\cdot e^{j\omega_1 t} + a_2 H(\omega_2)\cdot e^{j\omega_2 t} \end{aligned}$$

Γενικά έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, H(k\omega_0)\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε και θα μελετήσουμε τρόπους ανάλυσης ενός σήματος σε σήματα απλής συχνότητας. Μια τέτοια προσέγγιση μας διευκολύνει ώστε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος, το οποίο διεγείρεται από ένα σύνθετο σήμα.

Στο χώρο των *n*-διαστάσεων κάθε διάνυσμα παριστάνεται ως

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{e_i}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n(t)$$

Το ***εσωτερικό γινόμενο*** δύο διανυσμάτων ορίζεται από τη σχέση

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)\, y^*(t)\, dt$$

Για μια ορθοκανονική βάση διανυσμάτων οι συντεταγμένες (α_1, α_2, …, α_n), ενός διανύσματος **a**, είναι οι προβολές του **a** σε κάθε ένα από τα διανύσματα βάσης και προσδιορίζονται από τη σχέση

$$a_i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e_i} \rangle \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_n = \langle x(t), \psi_n(t) \rangle = \int_a^b x(t)\, \psi_n^*(t)\, dt$$

Το ***μέτρο*** *(norm)* ή ***μήκος*** ενός διανύσματος, ορίζεται από τη σχέση

$$\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\|x(t)\|_2 = \langle x(t), x(t) \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt}$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$) ***καλείται ορθοκανονικό*** όταν

$$\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_m \rangle = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$\langle \psi_k(t), \psi_m(t) \rangle = \delta(k-m)$$