ΑΣΚΗΣΗ 4.5

Λύση:

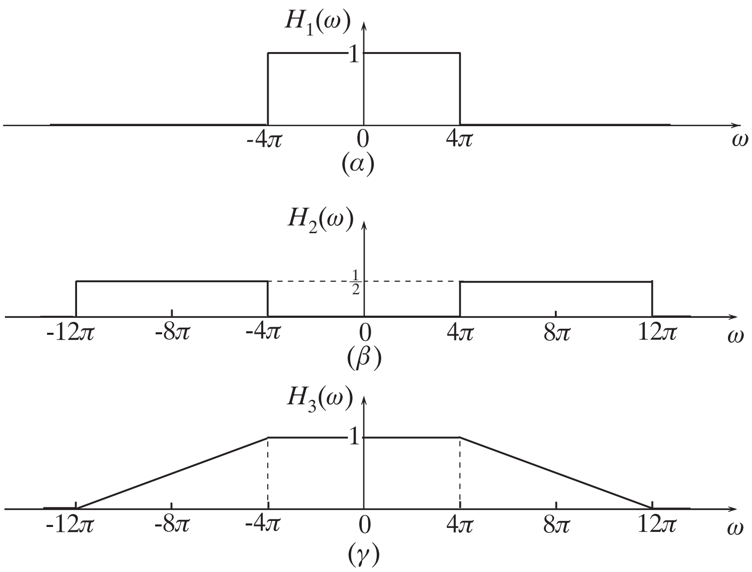
1. Από το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier

$$\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |\omega| < W \\ 0, & \text{αν } |\omega| > W \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο σύστημα έχει απόκριση συχνότητας

$$h_1(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_1(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |\omega| < 4\pi \\ 0, & \text{αν } |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 4.1α. Παρατηρούμε ότι το πρώτο σύστημα είναι ένα ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης με κυκλική συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 4\pi$.



Σχήμα 4.1 Οι αποκρούσεις συχνότητας των φίλτρων.

Το σήμα εισόδου του συστήματος είναι $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(8\pi t)$. Παρατηρούμε ότι η κυκλική συχνότητα $\omega_1 = 2\pi$ διέρχεται από το σύστημα, ενώ αποκόπτεται η κυκλική συχνότητα $\omega_2 = 8\pi$. Έτσι το σήμα εξόδου του συστήματος είναι

$$y_1(t) = \cos(2\pi t)$$

2. Η κρουστική απόκριση του δεύτερου συστήματος γράφεται ως

$$h_2(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\cos(8\pi t) = h_1(t)\cos(8\pi t)$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας ολίσθησης συχνότητας

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

η απόκριση συχνότητας του δεύτερου συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H_2(\omega) &= \frac{1}{2}\left[H_1(\omega-\omega_0)+H_1(\omega+\omega_0)\right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{αν } 4\pi < |\omega| < 12\pi \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 4.1β. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σύστημα είναι ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο με ζώνη διέλευσης $[4\pi, 12\pi]$ και απόκριση πλάτους στη ζώνη διέλευσης ίση με 1/2.

Το σήμα εισόδου του συστήματος είναι $x(t) = \cos(2\pi t)+\sin(8\pi t)$. Παρατηρούμε ότι η κυκλική συχνότητα $\omega_1 = 2\pi$ αποκόπτεται από το σύστημα, ενώ η κυκλική συχνότητα $\omega_2 = 8\pi$ διέρχεται με το μισό πλάτος. Έτσι το σήμα εξόδου του συστήματος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\cos(8\pi t)$$

3. Η κρουστική απόκριση του τρίτου συστήματος γράφεται ως

$$h_3(t) = \frac{\sin(4\pi t)\sin(8\pi t)}{(\pi t)^2} = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(8\pi t)}{\pi t}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης η απόκριση συχνότητας του τρίτου συστήματος είναι η συνέλιξη δύο ορθογώνιων παλμών

$$H_3(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) \star \Pi\left(\frac{\omega}{16\pi}\right)$$

Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 4.1γ. Παρατηρούμε ότι το τρίτο σύστημα είναι ένα φίλτρο με ζώνη διέλευσης $[0, 4\pi]$ μεταβατική ζώνη $[4\pi,\ 12\pi]$ και ζώνη αποκοπής $[12\pi,\ \infty]$.

Το σήμα εισόδου του συστήματος είναι $x(t) = \cos(2\pi t)+\sin(8\pi t)$. Παρατηρούμε ότι η κυκλική συχνότητα $\omega_1 = 2\pi$ βρίσκεται στη ζώνη διέλευσης επομένως διέρχεται από το σύστημα, ενώ η κυκλική συχνότητα $\omega_2 = 8\pi$ η οποία βρίσκεται στη μεταβατική ζώνη και επειδή $H_3(8\pi) = \frac{1}{2}$ διέρχεται με το ήμισυ του πλάτους της από το σύστημα. Έτσι το σήμα εξόδου του συστήματος είναι

$$y_3(t) = \cos(2\pi) + \frac{1}{2}\cos(8\pi t)$$