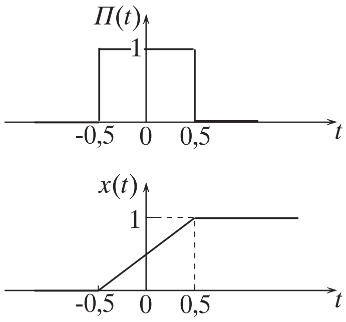
## ΑΣΚΗΣΗ 4.3

*Λύση*:

Από το Σχήμα 4.1 παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ είναι

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \Pi(\tau)\, d\tau$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολοκλήρωσης




**Σχήμα 4.1** Ο ορθογώνιος παλμός $\Pi(t)$ και το σήμα $x(t)$.

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

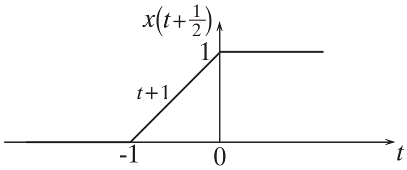
και το ζεύγος

$$F\left[\Pi(t)\right] = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} F\left[x(t)\right] &= \frac{1}{j\omega}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \pi\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega}\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} + \pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier του σήματος $x\left(t+\frac{1}{2}\right)$ του Σχήματος 4.2 χρησιμοποιώντας την εξίσωση σύνθεσης.




**Σχήμα 4.2** Το σήμα $x\left(t+\frac{1}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{0}(t+1)e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} 1e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} te^{-j\omega t}\,dt + \int_{-1}^{0} e^{-j\omega t}\,dt + F\left[u(t)\right] \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[ te^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{-j\omega}\,dt \right] + \int_{-1}^{0} e^{-j\omega t}\,dt + F\left[u(t)\right] \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[0 + e^{j\omega} + \frac{1}{j\omega}\left(1-e^{j\omega}\right)\right] - \frac{1}{j\omega}\left(1-e^{j\omega}\right) + F\left[u(t)\right] \\
&= -\frac{1}{j\omega}e^{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}\left(1-e^{j\omega}\right) - \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega}e^{j\omega} + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \\
&= \frac{1}{\omega^2}\left(1-e^{j\omega}\right) + \pi\delta(\omega) \\
&= \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right)e^{j\frac{\omega}{2}} + \pi\delta(\omega) \\
&= \frac{1}{j\omega}\frac{\sin\left(\omega/2\right)}{\omega/2}e^{j\frac{\omega}{2}} + \pi\delta(\omega)
\end{aligned}
$$