ΑΣΚΗΣΗ 4.2

Λύση: Παρουσιάζονται τρεις τρόποι λύσης.

- Ο πρώτος τρόπος εκμεταλλεύεται γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Fourier.
- Ο δεύτερος τρόπος βασίζεται στην εξίσωση ανάλυσης και χρησιμοποιεί την ιδιότητα της ολίσθησης.
- Τέλος ο τρίτος τρόπος βρίσκει το σήμα $x(t)$ χρησιμοποιώντας μόνο την εξίσωση ανάλυσης.

1. Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται

$$|X(\omega)| = \begin{cases} \omega e^{-j3\omega}, & \text{αν } 0 \leq \omega \leq 1 \\ -\omega e^{-j3\omega}, & \text{αν } -1 \leq \omega \leq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο παράγωντας $e^{-j3\omega}$ υποδηλώνει χρονική ολίσθηση κατά 3 χρονικές μονάδες στο πεδίο του χρόνου. Είναι λοιπόν σκόπιμο να υπολογισθεί αρχικά το σήμα $x_1(t)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X_1(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{αν } 0 \leq \omega \leq 1 \\ -\omega, & \text{αν } -1 \leq \omega \leq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης το σήμα $x(t)$

Παρατηρούμε από το Σχήμα 4.1, ότι

$$X_1(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) - \Lambda(\omega)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Fourier

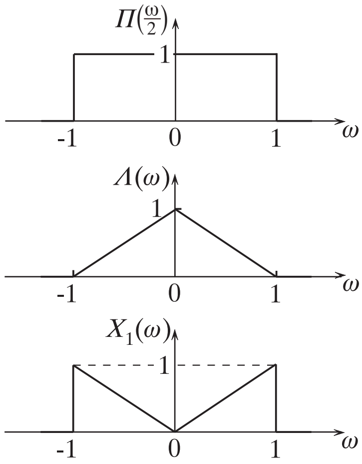
$$F^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] = \frac{\sin(t)}{\pi t}$$

και

$$F^{-1}\left[\Lambda(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} F^{-1}\left[X_1(\omega)\right] &= F^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] - F^{-1}\left[X_1(\omega)\right] \\ &= \frac{\sin(t)}{\pi t} - \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2} \\ &= \frac{\sin(t)}{\pi t} - \frac{1 - \cos(t)}{\pi t^2} \end{aligned}$$



Σχήμα 4.1 Τα φάσματα $\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\Lambda(\omega)$ και $X_1(\omega)$.

και με εφαρμογή της ιδιότητας χρονικής ολίσθησης $F\left[x(t-t_0)\right] = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$ έχουμε

$$x(t) = \frac{\sin(t-3)}{\pi(t-3)} + \frac{\cos(t-3)-1}{\pi(t-3)^2}$$

2. Αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ανάλυσης το σήμα που έχει μετασχηματισμό Fourier $X_1(\omega)$ είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\omega e^{-j\omega t}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\omega e^{-j\omega t}\,d\omega \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το αόριστο ολοκλήρωμα της εκθετικής συνάρτησης e^{ax}

$$\int xe^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right]$$

όπου $x=\omega$ και $\alpha=-jt$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{1}{2\pi}\, e^{-j\omega t}\left(\frac{\omega}{-jt}+\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2\pi}\, e^{-j\omega t}\left(\frac{\omega}{-jt}+\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{0}^{1} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{t^2} - e^{jt}\left(\frac{1}{jt}+\frac{1}{t^2}\right)\right] + \frac{1}{2\pi}\left[e^{-jt}\left(\frac{1}{-jt}+\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{t^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{t^2} + e^{-jt}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{jt}\right) + e^{jt}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{jt}\right)-\frac{1}{t^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^2}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) + \frac{1}{jt}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2}{t^2} + \frac{2\cos(t)}{t^2} + \frac{2}{t}\sin(t)\right] \\
&= \frac{\sin(t)}{\pi t} + \frac{\cos(t)-1}{\pi t^2}
\end{aligned}
$$

με εφαρμογή της ιδιότητας χρονικής ολίσθησης $F\left[x(t-t_0)\right] = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$ έχουμε

$$
x(t) = \frac{\sin(t-3)}{\pi(t-3)} + \frac{\cos(t-3)-1}{\pi(t-3)^2}
$$

3. Τέλος με τη βοήθεια μόνο της εξίσωση ανάλυσης το σήμα που έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ είναι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} -\omega e^{j3\omega}e^{-j\omega t}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \omega e^{j3\omega}e^{-j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} -\omega e^{-j\omega(t-3)}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \omega e^{-j\omega(t-3)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\int_{-1}^{0} -\omega\, de^{-j\omega(t-3)} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\int_{0}^{1} \omega\, de^{-j\omega(t-3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[-\omega e^{-j\omega(t-3)}\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-j\omega(t-3)}\,d\omega\right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[\omega e^{-j\omega(t-3)}\Big|_{0}^{1} - \int_{-1}^{0} e^{-j\omega(t-3)}\,d\omega\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} + \frac{1}{j(t-3)}\int_{-1}^{0} de^{-j\omega(t-3)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} - \frac{1}{j(t-3)}\int_{-1}^{0} de^{-j\omega(t-3)}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} + \frac{1}{j(t-3)}\, e^{-j\omega(t-3)}\Big|_{-1}^{0}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} - \frac{1}{j(t-3)}\, e^{-j\omega(t-3)}\Big|_{0}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} + \frac{1}{j(t-3)}\left[1 - e^{j(t-3)}\right]\right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} - \frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} - 1\right]\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{j(t-3)}\left[e^{-j(t-3)} - e^{-j(t-3)}\right] - \frac{1}{(t-3)^2}\left[e^{j(t-3)} - e^{j(t-3)}\right] - \frac{1}{(t-3)^2}\right] \\
&= \frac{\sin(t-3)}{\pi(t-3)} + \frac{\cos(t-3)-1}{\pi(t-3)^2}
\end{aligned}
$$