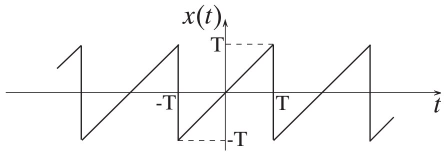
ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής και της τριγωνομετρικής σειράς Fourier για το περιοδικό σήμα που περιγράφεται στο σχήμα



Σχήμα 4.1 Το περιοδικό σήμα στην άσκηση.

Λύση:
Παρατηρούμε ότι το σήμα έχει θεμελιώδη περίοδο $T_0 = 2T$ $(\omega_0 = \pi)$ και περιγράφεται από την εξίσωση $x(t) = t, |t| < T$. Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier υπολογίζονται με τη βοήθεια της εξίσωσης ανάλυσης, όπου η ολοκλήρωση γίνεται από $-T$ έως T.

$$\begin{aligned}
a_k = \frac{1}{2T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\pi t}\,dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} te^{-jk\pi t}\,dt \\
&= -\frac{1}{j2k\pi T}\int_{-T}^{T} t\,de^{-jk\pi t} \\
&= -\frac{1}{j2k\pi T}\left[te^{-jk\pi t}\Big|_{-T}^{T} - \int_{-T}^{T} e^{-jk\pi t}\,dt\right] \\
&= -\frac{1}{j2k\pi T}\left[Te^{-jk\pi T} + Te^{jk\pi T} + \frac{1}{jk\pi}\,e^{-jk\pi t}\Big|_{-T}^{T}\right] \\
&= \frac{j}{2k\pi T}\left[2T\cos(k\pi) - \frac{1}{jk\pi}2j\sin(k\pi)\right]
\end{aligned}$$

και επειδή $\cos(k\pi) = (-1)^k$ ενώ $\sin(k\pi) = 0$, οι συντελεστές είναι

$$a_k = \frac{j(-1)^k}{k\pi}$$

Η συνεχής συνιστώσα του σήματος είναι

$$a_0 = \frac{1}{2T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t\,dt = 0$$

Οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin(k\omega_0 t), \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

είναι

$$a_0 = 0,\ b_k = 0,\ \text{για } k = 1,\ 2,\ ...\ \text{και } c_k = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}\ \text{για } k = 1,\ 2,\ ...$$