ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Δίνεται το σήμα $x(t) = A\cos^2(2\pi f t)$

1. Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $x(t)$.
2. Να δείξετε ότι το σήμα $x(t)$ είναι σήμα ισχύος.
3. Να υπολογίσετε την ισχύ του σήματος με τη βοήθεια της Ταυτότητας του Parseval.

Λύση:

1. Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής σχέτης $2\cos^2\phi = 1 + \cos(2\phi)$ και της σχέσης Euler, το σήμα $x(t)$ γράφεται

$$x(t) = \frac{A}{2}\left[1 + \cos(4\pi f t)\right] = \frac{A}{2} + \frac{A}{4}e^{j4\pi f t} + \frac{A}{4}e^{-j4\pi f t}$$

Η σύγκριση της τελευταίας εξίσωσης με την εξίσωση σύνθεσης δίδει

$$\omega_0 = 4\pi f,\ a_0 = \frac{A}{2},\ a_{\pm1} = \frac{A}{4} \text{ και } a_k = 0,\ \text{για } k = 2,\,3,\,...$$

2. Το σήμα είναι περιοδικό έτσι είναι σήμα ισχύος. Η ενέργεια ενός περιοδικού σήματος είναι άπειρη.

3. Στο πεδίο του χρόνου έχουμε

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt \\
&= \int_0^T A^2\cos^4(2\pi f t)\, dt \\
&= \frac{3A^2}{8T}\int_0^T 1\, dt + \frac{4A^2}{8T}\int_0^T \cos(2\pi f t)\, dt + + \frac{A^2}{8T}\int_0^T \cos(8\pi f t)\, dt \\
&= \frac{3A^2}{8}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η τριγωνομετρική ταυτότητα $8\cos 4\phi = 3 + 4\cos(2\phi) + \cos(4\phi)$

Για το πεδίο της συχνότητας έχουμε

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \frac{3A^2}{8}$$