

ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Δίνεται το σύστημα μέσης τιμής $y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$ να εξεταστεί

1. αν το σύστημα είναι γραμμικό
2. αν το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο
3. αν είναι αιτιατό και
4. αν είναι στατικό

Λύση:

1. Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του συστήματος μέσης τιμής, τότε η έξοδος του είναι

$$y_1(t) = S\{x_1(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_1(\tau) d\tau$$

Ομοίως αν $x_2(t)$ είναι το σήμα εισόδου, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = S\{x_2(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_2(\tau) d\tau$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)] d\tau \\ &= a \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_1(\tau) d\tau + b \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x_2(\tau) d\tau \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε απόκριση του συστήματος σε μία είσοδο, που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στο καθένα από τα σήματα αυτά επομένως το σύστημα μέσης τιμής είναι γραμμικό.

2. Αν η είσοδος του συστήματος μέσης τιμής είναι το σήμα $x(t-t_0)$, το σήμα εξόδου είναι το σήμα

$$\begin{aligned} y'(t) = S\{x(t-t_0)\} &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\xi-t_0) d\xi \\ &\stackrel{\tau=\xi-t_0}{=} \frac{1}{T} \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \\ &= y(t-t_0) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $y'(t) = S\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$, δηλαδή, χρονική ολίσθηση του σήματος εισόδου κατά t_0 μεταφράζεται σε αντίστοιχη χρονική ολίσθηση στην έξοδο, επομένως, το σύστημα μέσης τιμής είναι χρονικά αναλλοίωτο.

3. Η έξοδος του συστήματος μέσης τιμής εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου στο χρονικό διάστημα $[t - T, t]$, που είναι το όριο του ολοκληρώματος, δηλαδή, η έξοδος εξαρτάται από την παρούσα και από προηγούμενες τιμές της εισόδου. Το σύστημα μέσης τιμής είναι λοιπόν αιτιατό.
4. Η έξοδος του συστήματος τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου για το χρονικό διάστημα $[t - T, t]$, δηλαδή, εξαρτάται από το ιστορικό της του σήματος εισόδου. Το σύστημα μέσης μέσης λοιπόν δεν είναι στατικό.