ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Να δειχθεί ότι το σήμα $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$ είναι σήμα ενέργειας και να βρεθεί η ενέργεια του.

Λύση:

Για να είναι ένα σήμα, σήμα ενέργειας θα πρέπει να έχει πεπερασμένη ενέργεια, δηλαδή, πρέπει $\mathcal{E}_x < \infty$. Για την ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos^2(t)\,dt \\
&\leq \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα $\cos^2 t \leq 1$. Έπομένως το σήμα είναι σήμα ενέργειας. Η ενέργεια του σήματος είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\cos^2(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos(2t)\,dt \\
&= -\frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} de^{-2t} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos(2t)\,dt \\
&= -\frac{1}{4}\,e^{-2t}\big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos(2t)\,dt \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}\sin(2t)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$ και με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int f(x)g^{'}\,dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)\,dx$$

υπολογίστηκε το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int e^{-2t}\cos(2t)\,dt$ ως

$$\begin{aligned}
I = \int e^{-2t}\cos(2t)\,dt &= \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)'\cos(2t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)(-\sin(2t))\,2\,dt \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t) - \int e^{-2t}\sin(2t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)'\sin(2t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t) - \int \frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t)\,2dt \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\cos(2t) - \sin(2t)\right) - I
\end{aligned}$$

επομένως

$$I = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\cos(2t) - \sin(2t)\right) - I$$

και

$$I = \int e^{-2t}\cos(2t)\,dt = -\frac{1}{4}e^{-2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(2t)$$