ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Ποια από τα σήματα είναι περιοδικά;

1. $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$

2. $x_2(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

Λύσεις:

1. Για να είναι περιοδικό το σήμα θα πρέπει να υπάρχει αριθμός T για τον οποίο να είναι $x_1(t+T) = x_1(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t. Έχουμε λοπόν

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \cos^2(2\pi(t+T)) \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos(4\pi(t+T)) \end{aligned}$$

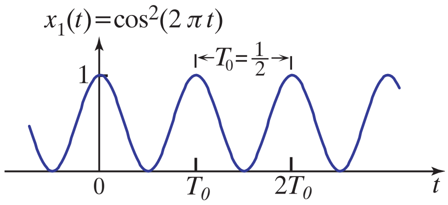
όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\theta)]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \cos(4\pi(t+T)) &= \cos(4\pi t + 4\pi T) \\ &= \cos(4\pi t) \end{aligned}$$

για $4\pi T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{k}{2}$ επομένως

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \frac{1}{2}(1+\cos(4\pi(t+T)) \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos(4\pi t)) \\ &= \cos^2(2\pi t) \\ &= x_1(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Έτσι το σήμα $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T = \frac{1}{2}$sec Στο Σχήμα έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο στο οποίο φαίνεται ότι το σήμα είναι περιοδικό.

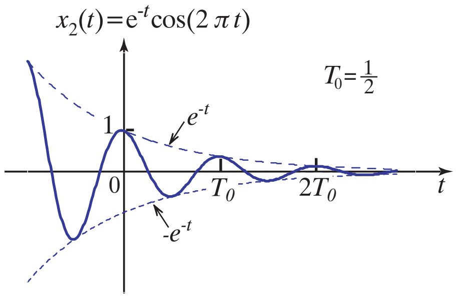


Σχήμα 1 Η γραφική παράσταση του σήματος $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$.

2. Για να είναι περιοδικό το σήμα $x_2(t)$ πρέπει $x_2(t+t) = x_2(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t. Έχουμε λοπόν

$$\begin{aligned} x_2(t+T) &= e^{-2(t+T)}\cos\left(2\pi(t+T)\right) \\ &= e^{-2t}e^{-2T}\cos\left(2\pi t + 2\pi T\right)) \\ &\overset{\text{για T ακέραιο}}{=} e^{-2t}e^{-2T}\cos(2\pi t) \\ &= x_2(t)e^{-2T} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $x_2(t+T) = x_2(t)$ ισχύει μόνο για $T = 0$ επομένως το σήμα $x_2(t)$ είναι μη περιοδικό. Στο Σχήμα έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x_2(t) = e^{-t}\cos 2(2\pi t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο στο οποίο φαίνεται ότι το σήμα είναι περιοδικό.



Σχήμα 2 Η γραφική παράσταση του σήματος $x_2(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)$.